Matematyka

Zadania powtórzeniowe do matury

-poziom podstawowy i rozszerzony

Spis treści

1

Ciągi liczbowe

1.1 Zadania o sposobach opisywania ciągów

Zadanie 1.1.1. Jaki jest wzór na wyraz ogólny każdego z poniższych ciągów liczbowych:

1. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots,$
2. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots,$
3. $5, 7, 9, 11, \dots,$
4. $\cos 0, \cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{2}, \cos\frac{3\pi}{4}, \dots,$
5. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots,$
6. $3, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{16}, \frac{3}{25}, \dots,$?

Zadanie 1.1.2. Wyznacz trzy pierwsze wyrazy ciągu (a_n) o podanym wzorze:

1. $a_n = 3n + 4,$
2. $a_n = \frac{1}{1+n^2},$
3. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2,$
4. $a_n = \sqrt{n+1}.$

Zadanie 1.1.3. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym a_n. Wyznacz wyrazy tego ciągu dla tych wartości n, które są jednocyfrowymi liczbami pierwszymi, jeżeli:

1. $a_n = \frac{4n-1}{n^2},$
2. $a_n = \frac{-2n+n^2}{4},$
3. $a_n = \sqrt{-1+n^2},$

4. $a_n = \frac{n-1}{n}$.

Zadanie 1.1.4. (R) Podaj przykłady wzorów ogólnych trzech ciągów, w których czwarty i piąty wyraz przyjmują wartość zero.

Zadanie 1.1.5. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym a_n. Który wyraz tego ciągu przyjmuje wartość 10, jeżeli:

1. $a_n = n^2 - 5n + 4$,
2. $a_n = n^2 - 8n + 1$,
3. $a_n = \frac{8n}{n-2}$,
4. $a_n = \sqrt{15n - 5}$?

Zadanie 1.1.6. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym b_n. Zbadaj, który wyraz tego ciągu przyjmuje wartość 0, jeżeli:

1. $b_n = \frac{n^2+3n-10}{n}$,
2. $b_n = \frac{n^3+n^2-5n+3}{4n}$,
3. $b_n = \frac{n^3-11n^2+38n-40}{(n-5)^2}$,
4. $b_n = \frac{\sqrt{3n-6}}{n-2}$,
5. $b_n = \frac{\sqrt{3(n-5)(n-3)}}{3n-1}$,
6. $b_n = \frac{\sqrt[3]{(n-9)^2}}{2n+9}$.

Zadanie 1.1.7. Wyznacz pierwszy, dziesiąty i setny wyraz ciągu (a_n), jeżeli wiadomo, że

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n+n^2}, \qquad a_n + a_{n-1} = \frac{2n^2-1}{n+n^2}.$$

Zadanie 1.1.8. Które wyrazy ciągu (c_n) są większe od stu, jeżeli:

1. $c_n = 3n - 15$,
2. $c_n = \sqrt{4n+2}$,
3. $c_n = n^2 + 20n$,
4. $c_n = \frac{n+1}{n-1}$?

1.2 Zadania o granicach ciągów liczbowych

Zadanie 1.2.1. (R) Wyznacz granicę każdego z podanych poniżej ciągów przy $n \to \infty$:

1. $a_n = \frac{2n^2-3n}{3n^2}$,
2. $a_n = \frac{4n^3-3n^2}{-2n^3}$,
3. $a_n = \frac{2n^4-4n^3-3n^2}{5n^4-6n^2}$,
4. $a_n = \frac{(n-2)(3n+4)}{-n^2-2n}$,
5. $a_n = \frac{-2n(n^2-1)(4n+3)}{-n^4-2n^3}$,
6. $a_n = \frac{(2n+5)^3}{3n^3}$.

Zadanie 1.2.2. (R) Dane są ciągi o wyrazach ogólnych $a_n = 2n^2 - n$, $b_n = n^3 - 2n^2$, $c_n = 4n$. Wyznacz granicę ciągu (d_n) przy $n \to \infty$, jeżeli:

1. $d_n = \frac{a_n \cdot c_n}{b_n}$,
2. $d_n = \frac{b_n - a_n \cdot c_n}{b_n}$,
3. $d_n = \frac{b_n + a_n \cdot c_n}{b_n}$,
4. $d_n = \frac{\frac{1}{c_n} \cdot b_n}{a_n}$,
5. $d_n = \frac{(a_n)^2}{b_n \cdot c_n}$,
6. $d_n = \frac{-b_n + a_n \cdot c_n}{a_n \cdot c_n}$.

Zadanie 1.2.3. (R) Dane są ciągi o wyrazach ogólnych $a_n = n^2 - 2n$, $b_n = n^3 + 2n$, $c_n = -3n$. Wykorzystując każdy z podanych ciągów co najmniej raz oraz znaki działań arytmetycznych zapisz taki ciąg (d_n), który przy $n \to \infty$ ma następującą wartość granicy:

1. -3,
2. $-\frac{1}{3}$,
3. $+\infty$,
4. $-\infty$.

Zadanie 1.2.4. (R) Dla jakich wartości a i b ($a \neq b$) ciąg o podanym wyrazie ogólnym a_n przy $n \to \infty$ granicę równą 2:

1. $a_n = \frac{(an^2-3n)(bn+1)}{2n^3-4}$,
2. $a_n = \frac{(3n^3-4n)(an-1)}{bn^4+2n}$,
3. $a_n = \frac{(-n^2+3n)\cdot 2an}{bn^3-2}$,

4. $a_n = \frac{(an^2-3)^2}{3bn^4-4}$,
5. $a_n = \frac{(-2an^3+1)^2}{(bn^3-2)^2}$,
6. $a_n = \frac{\sqrt{2}an^2-3\sqrt{3}n}{-bn^2+7}$?

Zadanie 1.2.5. (R) Wyznacz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n przy $n \to \infty$:

1. $a_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$,
2. $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-2n}$,
3. $a_n = \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}$,
4. $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$,
5. $a_n = \left(1 - \frac{7}{n^2}\right)^{2n^2}$,
6. $a_n = \left(1 - \frac{7}{n^2+1}\right)^{1+n^2}$.

Zadanie 1.2.6. (R) Wypisz takie wykładniki we wzorach ciągów, aby granica każdego z nich była równa e^{-3}:

1. $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)$,
2. $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)$,
3. $a_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)$,
4. $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)$,
5. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$,
6. $a_n = \left(1 - \frac{5}{n}\right)$.

Zadanie 1.2.7. (R) Podaj przykłady wzorów ogólnych czterech różnych ciągów, które przy $n \to \infty$ mają granicę niewłaściwą.

Zadanie 1.2.8. (R) Jaka jest granica ciągu o wyrazie ogólnym a_n przy $n \to \infty$, jeżeli:

1. $a_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}$,
2. $a_n = \sqrt{-3+n^2} - \sqrt{n^2+1}$,
3. $a_n = \sqrt{7n^2-1} + \sqrt{5n^2+2}$,
4. $a_n = n - 2\sqrt{n+1}$,
5. $a_n = 2n^2 - \sqrt{n+3}$,
6. $a_n = \sqrt{2n} + \sqrt{n^2-2n}$?

Zadanie 1.2.9. (R) Podaj przykłady trzech różnych ciągów, które mają taką samą granicę przy $n \to \infty$, jak ciąg a_n o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{3n^2-5n+1}{2n^2-3}.$$

1.3 Zadania o ciągach arytmetycznych

Zadanie 1.3.1. Zbadaj, które z poniższych ciągów są ciągami arytmetycznymi:

1. ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 4,5 - 2n$,
2. ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 2n - 1$,
3. ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (9n^2 - 1) : (3n + 1) - 1,5$,
4. ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{4n-1}{4}$,
5. ciąg, którego wyrazami są pola kwadratów o długościach boków wyrażających się kolejnymi liczbami naturalnymi,
6. ciąg, którego wyrazami są obwody trójkątów równobocznych o długościach boków wyrażających się kolejnymi liczbami naturalnymi parzystymi.

Zadanie 1.3.2. Dane są liczby $-1,5$ oraz $25,5$. Wpisz pomiędzy nimi podaną liczbę takich liczb, aby z danymi tworzyły one ciąg arytmetyczny:

1. cztery,
2. pięć,
3. osiem.

Zadanie 1.3.3. Liczby 7 i 14 są kolejnymi wyrazami pięcioelementowego rosnącego ciągu arytmetycznego. Jaki jest wyraz ogólny tego ciągu? Podaj wszystkie możliwe rozwiązania.

Zadanie 1.3.4. Wyznacz taką wartość x, dla której wyrażenia $2x - 7n - 1$, $4x - 7n + 5$, $9x - 7n + 14$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (w podanej kolejności).

Zadanie 1.3.5. Wyznacz wartość setnego wyrazu rosnącego ciągu arytmetycznego, wiedząc, że rozwiązania równania $x^2 - 10x + 21 = 0$ są wyrazami tego właśnie ciągu o numerach:

1. pierwszym i piątym,
2. piątym i dziesiątym.

Zadanie 1.3.6. Suma ósmego i jedenastego wyrazu w pewnym rosnącym ciągu arytmetycznym jest równa $20,5$, a różnica pomiędzy tymi wyrazami jest równa $4,5$. Wyznacz sumę od ósmego do siedemnastego wyrazu tego ciągu.

Zadanie 1.3.7. Suma dziesięciu początkowych wyrazów w pewnym ciągu arytmetycznym jest równa $152,5$, a suma dwudziestu początkowych wyrazów tego samego ciągu jest o $402,5$ większa. Wyznacz wzór na wyraz ogólny tego ciągu.

Zadanie 1.3.8. Kwadrat magiczny piątego stopnia został wypełniony liczbami tworzącymi rosnący ciąg arytmetyczny. Suma magiczna tego kwadratu jest równa $177,5$, a największy wyraz ma wartość $43,5$. Wyznacz najmniejszy wyraz a_1 tego kwadratu oraz różnicę ciągu arytmetycznego r.

Zadanie 1.3.9. W kwadracie magicznym piątego stopnia wypełnionymi liczbami tworzącymi rosnący ciąg arytmetyczny dany jest wyraz znajdujący się w środkowym polu równy 120 oraz wyraz najmniejszy równy 36. Wyznacz największy wyraz a_{25} tego kwadratu oraz różnicą ciągu arytmetycznego r.

Zadanie 1.3.10. Oblicz sumę wszystkich liczb wpisanych do kwadratu magicznego rzędu dziewiątego, jeżeli wiesz, że są one kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego o różnicy $0,5$, w którym pierwszy wyraz ma wartość 18.

Zadanie 1.3.11. (R) Udowodnij, że jeżeli w trzech kwadratach magicznych piątego stopnia wyrazy środkowe są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to sumy magiczne są również kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Zadanie 1.3.12. Dla jakiej wartość m poniższe wyrażenia (w podanej kolejności) są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego:

1. $m - 7$,3, $2m + 4$,
2. $2m + 1$, $4m - 7$, 7,
3. $-m^2 + 8m$, 4, $4m - 3$,
4. $m^2 - 2m$, $2m + 1$, $4m + 2$.

Zadanie 1.3.13. W pewnym ciągu arytmetycznym wyraz dwunasty jest równy $78,5$, a wyraz dwudziesty pierwszy $141,5$. Jaka jest suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu?

Zadanie 1.3.14. W ciągu arytmetycznym różnica pomiędzy siedemdziesiątym siódmym i siódmym wyrazem jest równa 105, a suma siedmiu początkowych wyrazów jest równa $45,5$. Wyznacz siedemdziesiąty siódmy wyraz tego ciągu.

Zadanie 1.3.15. W ciągu arytmetycznym jest dokładnie dwadzieścia wyrazów. suma pięciu początkowych wyrazów jest równa 60, a suma pięciu ostatnich $247,5$. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu i różnicę r.

Zadanie 1.3.16. Suma liczb a, b, c jest równa 85. Jeżeli pierwszą i ostatnią liczbę zmniejszymy o 40%, a środkową zwiększymy o 40%, to liczby te będą trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 6. Wyznacz liczby a, b, c.

Zadanie 1.3.17. Mając podany pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego a_1, różnicę r pomiędzy kolejnymi wyrazami oaz sumę n początkowych wyrazów S_n, wyznacz n:

1. $a_1 = 1,5$, $r = 4$, $S_n = 19950$,
2. $a_1 4$, $r = 1,5$, $S_n = 365$,
3. $a_1 = -5$, $r = 2,5$, $S_n = 625$,
4. $a_1 = -1,5$, $r = 8$, $S_n = 11797,5$.

Zadanie 1.3.18. Jaka jest suma wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych:

1. mniejszych od 900,

2. podzielnych przez 4,
3. parzystych,
4. podzielnych przez 3,
5. podzielnych przez 9,
6. podzielnych przez 3 lub 4?

Zadanie 1.3.19. Oblicz sumę kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez:

1. trzy, większych od 12 i mniejszych od 150,
2. pięć, większych od 110 i mniejszych od 400,
3. dziewięć, większych od 99 i mniejszych od 450,
4. jedenaście, większych od 121 i mniejszych od 1331.

Zadanie 1.3.20. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych, które nie są podzielne przez:

1. osiem,
2. dziesięć,
3. dwanaście,
4. dwadzieścia pięć.

Zadanie 1.3.21. Jaka jest suma wszystkich liczb mniejszych od 100, które nie są podzielne:

1. ani przez sześć, ani przez pięć,
2. ani przez trzy, ani prze dziesięć,
3. ani przez pięć, ani prze siedem,
4. ani przez siedem, ani przez osiem?

Zadanie 1.3.22. Współczynniki a, b, c wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$ są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego, a ich suma jest równa -12. Wyznacz te współczynniki, wiedząc, że są one liczbami całkowitymi różnymi od zera, a liczba -1 jest miejscem zerowym wielomianu $W(x)$.

Zadanie 1.3.23. Współczynniki a, b, c wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a ich suma jest równa -9. Różnica podwojonego współczynnika a i współczynnika c jest równa 9. Jaki jest wzór wielomianu $W(x)$?

Zadanie 1.3.24. Pierwiastki równania $x^2 - 2x - 8 = 0$ są piątym i ósmym wyrazem malejącego ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 1.3.25. Pierwiastki równania $x^2 - 7x + 6 = 0$ są kolejnymi wyrazami pewnego malejącego ciągu arytmetycznego o czterech wyrazach. Znajdź brakujące wyrazy tego ciągu. Pamiętaj o uwzględnieniu wszystkich rozwiązań.

Zadanie 1.3.26. Które wyrazy ciągu o wzorze $a_n = \frac{1}{4} + (n-1)\frac{1}{2}$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $-2x^2 + 5x - 2 \geqslant 0$?

Zadanie 1.3.27. Miary kątów wewnętrznych w trójkącie są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Różnica miar pomiędzy największym i najmniejszym kątem jest równa $90°$. Jakie to kąty?

Zadanie 1.3.28. Wszystkie liczby całkowite należące do zbioru rozwiązań nierówności $-x^2 + x + 20 \geqslant 0$ są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego. Podaj wzór ogólny tego ciągu i oblicz sumę jego wyrazów.

Zadanie 1.3.29. Długości krawędzi sześcianu o polu powierzchni całkowitej 294 oraz sześcianu o objętości 1728 są odpowiednio dziesiątym i dwudziestym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Wyznacz sumę pierwszych pięćdziesięciu wyrazów tego ciągu.

Zadanie 1.3.30. Narysuj dwa kąty ostre o różnych miarach. Niech ich miary będą drugimi trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Dorysuj dwa inne kąty takie, aby ich miary były pierwszym i czwartym wyrazem tego samego ciągu.

Zadanie 1.3.31. Narysuj dwa dowolne odcinki o różnych długościach. Niech ich długości będą pierwszym i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Dorysuj trzy odcinki takie, aby ich długości były drugim, czwartym i piątym wyrazem tego samego ciągu.

Zadanie 1.3.32. Długości pięciu odcinków wyrażone w centymetrach są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Suma długości tych odcinków jest równa $32,5$ cm, a piąty odcinek ma długość $9,5$ cm. Jak powinna być długość dziesiątego odcinka należącego do tego samego ciągu?

Zadanie 1.3.33. Obwody kwadratu, trójkąta równobocznego i rombu są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Suma tych obwodów jest równa 99, a różnica długości boku trójkąta równobocznego i kwadratu jest równa 4. Oblicz sumę pól tych figur, jeżeli w rombie kąt ostry ma miarę $30°$.

Zadanie 1.3.34. Długości boków pewnego trójkąta prostokątnego są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz pole koła wpisanego i pole koła opisanego na trójkącie o najkrótszych bokach, których długości są liczbami całkowitymi, jeżeli suma długości dwóch krótszych boków jest o 40% większa od długości najdłuższego.

Zadanie 1.3.35. Promień koła wpisanego w trójkąt równoboczny, promień koła opisanego na tym samym trójkącie i wysokość trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Suma tych wielkości jest równa 20. Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt i pole koła opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 1.3.36. (R) Objętości trzech sześcianów są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.Suma tych objętości jest równa 3000, a różnica pola powierzchni całkowitej sześcianu drugiego i pierwszego jest równa 450. Wyznacz długości krawędzi tych sześcianów.

Zadanie 1.3.37. Oblicz sumę obwodów dziesięciu trójkątów równobocznych, których długości boków wyrażone w centymetrach są kolejnymi wyrazami liczbami naturalnymi podzielnymi przez trzy, jeżeli długość boku najmniejszego trójkąta jest równa 6 cm.

Zadanie 1.3.38. Oblicz sumę obwodów dziesięciu sześcianów kwadratu, których długości boków wyrażone w centymetrach są kolejnymi liczbami naturalnymi podzielnymi przez cztery, jeżeli pierwszy kwadrat ma bok o długości 12 cm.

Zadanie 1.3.39. Jaka jest suma długości krawędzi dwudziestu sześcianów, jeżeli długości krawędzi wyrażone w decymetrach są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym dziesiąty wyraz ma wartość $3,9$ dm, a dwudziesty $6,9$ dm?

Zadanie 1.3.40. Pola dziesięciu równoległoboków wyrażone w cm^2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Pole drugiego równoległoboku jest równe 12 cm^2, a piątego 33 cm^2. Jakie pola ma pierwszy równoległobok tego ciągu, a jakie ostatni?

Zadanie 1.3.41. (R) Pola pięciu trójkątów równoramiennych o jednakowych wysokościach poprowadzonych na podstawy są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Udowodnij, że długości tych podstaw trójkątów tworzą również ciąg arytmetyczny.

Zadanie 1.3.42. Tomek obliczył liczbę przekątnych w każdym z wielokątów, który ma mniej niż jedenaście boków. Czy są wśród tych liczb takie, które są wyrazami ciągu arytmetycznego? Jeżeli tak, to są to przekątne których wielokątów?

Zadanie 1.3.43. Dla jakich wartości parametru m ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = 2,5 + (n-1)(2m-7)$ jest rosnący, a dla jakich malejący?

Zadanie 1.3.44. Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego o wyrazie ogólnym $a_n = -3 + (n-1)(m^2-4)$ w zależności od parametru m.

1.4 Zadania o ciągach geometrycznych

Zadanie 1.4.1. Zbadaj, które z poniższych ciągów są ciągami geometrycznymi:

1. ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (-2)^n$,
2. ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{1}{3} \cdot (7)^{n+1}$,
3. ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 3^n \cdot (\frac{1}{3})^{2n+1}$,
4. ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (n+1) \cdot 2^{n+1}$,
5. ciąg, którego wyrazami są obwody kwadratów o długościach boków będących kolejnymi liczbami naturalnymi nieparzystymi,
6. ciąg, którego wyrazami są miary kątów będących kolejnymi liczbami naturalnymi podzielnymi przez pięć.

Zadanie 1.4.2. Wyraz piąty w pewnym ciągu geometrycznym jest równy $1,5$, a siódmy $\frac{3}{16}$. Oblicz sumę czterech pierwszych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 1.4.3. wyraz czwarty w pewnym ciągu geometrycznym ma wartość $\frac{5}{9}$, a siódmy wyraz jest równy $\frac{5}{243}$. Znajdź pierwszy wyraz tego ciągu oraz jego iloraz.

Zadanie 1.4.4. Suma drugiego i piątego wyrazu w pewnym ciągu geometrycznym o siedmiu wyrazach jest równa 27. Iloczyn trzech pierwszych wyrazów tego ciągu jest również równy 27. Oblicz sumę trzech ostatnich wyrazów.

Zadanie 1.4.5. Tomek zapisał pięć liczb, które są kolejnymi wyrazami malejącego ciągu geometrycznego o pięciu wyrazach. Suma wyrazów o numerach parzystych jest równa $7,5$, a suma wyraz o numerach nieparzystych jest równa $15,75$. Jakie liczby zapisał Tomek?

Zadanie 1.4.6. Tomek zapisał siedem liczb, które są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Suma tych liczb jest równa 1093, a sum a pierwszej i ostatniej jest równa 730. Jakie liczby zapisał Tomek?

Zadanie 1.4.7. Wyznacz sumę kolejnych potęg o wykładniku naturalnym większym lub równym 1:

1. liczby 2 mniejszych od 5000,
2. liczby 3 mniejszych od 3000,
3. liczby 2 większych od 1000 i mniejszych od 5000.

Zadanie 1.4.8. Udowodnij, że jeżeli w czterech kwadratach magicznych piątego stopnia wyrazy środkowe są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to sumy magiczne są również kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 1.4.9. Współczynniki a, b, c funkcji $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 24$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, a ich suma jest równa 9. Wyznacz te współczynniki, wiedząc, że 2 jest miejscem zerowym funkcji $f(x)$.

Zadanie 1.4.10. Każdy następny współczynnik funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest o 25% większy od współczynnika poprzedniego. Suma wszystkich współczynników jest równa $15,25$. Jakim wzorem jest opisana funkcja $f(x)$?

Zadanie 1.4.11. Rozwiązania równania $x^2 - 12x + 27 = 0$ są wyrazami pewnego rosnącego ciągu geometrycznego o trzech wyrazach. Znajdź brakujący wyraz tego ciągu. Pamiętaj o zapisaniu wszystkich możliwych rozwiązań.

Zadanie 1.4.12. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 7,5x^3 + 17,5x^2 - 15x + 4$. Miejsca zerowe tego wielomianu uporządkowane malejąco są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o pięciu wyrazach. Znajdź sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 1.4.13. Miary kątów wewnętrznych w czworokącie są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Suma miar kąta najmniejszego i największego jest równa $252°$. Wyznacz miary kątów wewnętrznych tego czworokąta.

Zadanie 1.4.14. (R) W pewnym trapezie równoramiennym długości krótszej podstawy, ramienia i dłuższej podstawy są kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego. Jakie jest pole i obwód trapezu, jeżeli suma dwóch następnych wyrazów tego ciągu jest równa $67,5$, a różnica między wyrazami trzecim ii pierwszym jest równa 10.

Zadanie 1.4.15. Długość boku każdego następnego kwadratu jest dwukrotnie większa od długości kwadratu poprzedniego. Trzeci kwadrat ma obwód 16 cm. Jakie pole i obwód ma dziesiąty kwadrat? Ile razy większe pole o obwód ma piąty kwadrat w porównaniu z drugim?

Zadanie 1.4.16. Dla jakich wartości parametru m ciągi geometryczne o podanych poniżej wyrazach ogólnych są malejące?

1. $a_n = -2(m^2 - 3)^{n-1}$,
2. $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m + 1\right)^{n-1}$
3. $a_n = 4(m^2 - 3m - 4)^{n-1}$.

1.5 Zadania o ciągach arytmetycznym i geometrycznym

Zadanie 1.5.1. Suma trzech kolejnych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego jest równa $31,5$. Jeżeli pierwszy wyraz zmniejszymy o 3, drugi zwiększymy o $1,5$, a trzeci zwiększymy dwukrotnie, to otrzymane liczby będą kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz wyrazy ciągu arytmetycznego.

Zadanie 1.5.2. Paweł zapisał pięć liczb. Trzy pierwsze są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego o sumie 129, a trzy ostatnie są kolejnymi wyrazami malejącego ciągu arytmetycznego o sumie 300. Suma wszystkich zapisanych liczb jest równa 321. Znajdź te liczby.

Zadanie 1.5.3. Pomiędzy liczby -2 i -20 wstaw dwie takie liczby, aby trzy pierwsze były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, a trzy ostatnie-kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę trzech następnych wyrazów w ciągu arytmetycznym.

Zadanie 1.5.4. Zapisz dwie dowolne liczby i wstaw między nimi taką liczbę, aby wszystkie trzy były kolejnymi wyrazami ciągu:

1. arytmetycznego,
2. geometrycznego.

Zadanie 1.5.5. Tomek zapisał dziesięć potęg o podstawie 7 i wykładnikach będących kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego o różnicy 3. Czy wyrazy, które zapisał Tomek są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego? Jeśli tak, to podaj iloraz tego ciągu.

Zadanie 1.5.6. Tomek zapisał dziesięć liczb, które są kolejnymi wyrazami skończonego ciągu arytmetycznego o sumie $97,5$. Pierwszy, trzeci i siódmy wyraz są równocześnie kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Znajdź najmniejszy i największy wyraz ciągu arytmetycznego.

Zadanie 1.5.7. Podaj przykład wielomianu stopnia trzeciego, którego pierwiastki są kolejnymi wyrazami ciągu:

1. arytmetycznego o różnicy $\frac{1}{2}$,
2. geometrycznego o ilorazie $\frac{1}{2}$.

Zadanie 1.5.8. Podaj wzory dwóch funkcji kwadratowych mające po dwa różne miejsca zerowe, które po uporządkowaniu rosnąco będą kolejnymi wyrazami ciągu:

1. arytmetycznego,
2. geometrycznego.

Zadanie 1.5.9. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + 7,5x^2 + 12,5x$. Miejsca zerowe tego wielomianu uporządkowane rosnąco są odpowiednio trzecim, ósmym i trzynastym wyrazem ciągu arytmetycznego.

1. Znajdź sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu arytmetycznego.
2. Oblicz, dla ilu początkowych wyrazów suma jest równa $312,5$,
3. Podaj cztery wyrazy tego ciągu, które są równocześnie kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie 2.

Zadanie 1.5.10. Narysuj dwa kąty o różnych miarach. Pomiędzy nimi narysuj kolejne dwa kąty takie, aby miary wszystkich czterech były kolejnymi wyrazami ciągu:

1. arytmetycznego,
2. geometrycznego.

Zadanie 1.5.11. Narysuj dwa odcinki o różnych długościach. Pomiędzy nimi narysuj kolejne dwa odcinki takie, aby długości wszystkich czterech były kolejnymi wyrazami ciągu:

1. arytmetycznego,
2. geometrycznego.

Zadanie 1.5.12. Pomiędzy dwa kwadraty o polach 49 cm^2 i 225 cm^2 wstaw taki kwadrat, aby:

1. pola trzech kwadratów były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego,
2. obwody trzech kwadratów były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego,
3. długości boków trzech kwadratów były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 1.5.13. Dane są dwa kwadraty o bokach 4 cm i 32 cm. Wstaw pomiędzy nimi kolejne dwa kwadraty, aby:

1. długości boków czterech kwadratów były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego,
2. długości boków czterech kwadratów były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego,
3. obwody czterech kwadratów były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego,
4. pola kół wpisanych w te kwadraty były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

1.6 Zadania o szeregu geometrycznym

Zadanie 1.6.1. Wyznacz wartości poniższych nieskończonych ciągów geometrycznych:

1. $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \ldots$
2. $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \ldots$
3. $2 + \frac{3}{4} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{8} + \frac{27}{32} + \ldots$
4. $1 + 2 + 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \ldots$
5. $5 + 4 + 2\frac{2}{3} + 1\frac{7}{9} + \ldots$
6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \ldots$

Zadanie 1.6.2. (R) Wyznacz wartość ilorazu nieskończonego zbieżnego ciągu geometrycznego, mając podaną sumę jego wyrazów S i wartość pierwszego wyrazu a_1:

1. $a_1 = 2$, $S = 15$,
2. $a_1 = \frac{1}{2}$, $S = 4$,
3. $a_1 = \frac{2}{3}$, $S = \frac{3}{4}$,
4. $A_1 = \frac{2}{5}$, $S = 25$.

Zadanie 1.6.3. (R) Wyznacz wartości pierwszego i drugiego wyrazu nieskończonego zbieżnego ciągu geometrycznego o podanym ilorazie q i znanej wartości sumy wyrazów tego ciągu S:

1. $q = \frac{1}{6}$, $S = 14,4$,
2. $q = \frac{1}{3}$, $S = -4,5$,
3. $q = \frac{1}{8}$, $S = 4\frac{4}{7}$,
4. $q = \frac{2}{3}$, $S = 6$.

Zadanie 1.6.4. (R) Suma wyrazów w pewnym nieskończonym zbieżnym ciągu geometrycznym jest równa $-2\frac{2}{3}$, a drugi wyraz tego ciągu ma wartość $-\frac{1}{2}$. Wyznacz wartość pierwszego wyrazu tego ciągu a_1 oraz iloraz q.

Zadanie 1.6.5. (R) Wyznacz takie wartości x, dla których podane wyrażenia kolejnymi początkowymi wyrazami zbieżnego nieskończonego ciągu geometrycznego:

1. $1,\ \frac{2}{x-5},\ \frac{4}{(x-5)^2},\ \frac{8}{(x-5)^3},$
2. $x,\ \frac{x^2}{x+3},\ \frac{x^3}{(x+3)^2},\ \frac{x^4}{(x+3)^3},$
3. $x-2,\ \frac{(x-2)^2}{x+1},\ \frac{(x-2)^3}{(x+1)^2},\ \frac{(x-2)^4}{(x+1)^3},$
4. $1,\ \frac{2x}{x-2},\ \frac{4x^2}{(x-2)^2},\ \frac{8x^3}{(x-2)^3}.$

Zadanie 1.6.6. (R) Podaj przykłady trzech nieskończonych zbieżnych ciągów geometrycznych o takim samym ilorazie równym $0,5$ i pierwszych wyrazach tworzących ciąg arytmetyczny.

Zadanie 1.6.7. (R) Wykaż, że jeżeli pierwsze wyrazy trzech nieskończonych zbieżnych ciągów geometrycznych o takim samym ilorazie q tworzą ciąg arytmetyczny, to sumy wyrazów tych ciągów tworzą również ciąg arytmetyczny.

Zadanie 1.6.8. (R) Wyznacz sumę:

1. nieskończonej liczby odcinków, z których każdy następny jest czterokrotnie krótszy od poprzedniego, a pierwszy ma długość 12 cm,
2. obwodów nieskończonej liczby kwadratów, z których pierwszy ma pole 144 cm^2, a długość boku każdego kwadratu kolejnego jest o 40% mniejsza od długości boku poprzedniego,
3. obwodów okręgów, z których pierwszy ma promień o długości 12 cm, a promień każdego następnego okręgu stanowi $\frac{2}{7}$ promienia poprzedniego,
4. długości krawędzi sześcianów, z których pierwszy ma krawędź o długości 12 cm, a każdy następny ma krawędź o 10% krótszą od poprzedniego.

Zadanie 1.6.9. Wyznacz sumę pól podanych figur:

1. wszystkie prostokąty, o których wiadomo, że każdy następny ma boki dwukrotnie krótsze od poprzedniego,
2. wszystkie trójkąty prostokątne, o których wiadomo, że każdy następny ma przyprostokątne dwukrotnie krótsze od przyprostokątnych poprzedniego trójkąta.

Zadanie 1.6.10. Wyznacz zbiór rozwiązań poniższych równań:

1. $1+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+2)^4}+\ldots=3x-1,$
2. $x+\frac{x}{x-3}+\frac{x}{(x-3)^2}+\frac{x}{(x-3)^3}+\frac{1x}{(x-3)^4}+\ldots=\frac{4}{x-4},$
3. $3x+\frac{3x^2}{x+2}+\frac{3x^3}{(x+1)^2}+\frac{3x^4}{(x+2)^3}+\frac{3x^5}{(x+2)^4}+\ldots=x+1.$

2

Funkcje trygonometryczne

2.1 Zadania o funkcjach trygonometrycznych kąta ostrego

Zadanie 2.1.1. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 12 i 5. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.

Zadanie 2.1.2. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 12 cm, a wysokość na nią opuszczona ma długość 4 cm. Jakie są wartości funkcji trygonometrycznych kąta przy podstawie?

Zadanie 2.1.3. Wyznacz wartość funkcji trygonometrycznych kąta ostrego rombu:

1. o przekątnych 12 i 16,
2. o obwodzie $1,6$ dm o polu 12 cm^2.

Zadanie 2.1.4. Długość przekątnej prostokąta jest równa 12, a sinus kąta, jaki ta przekątna tworzy z dłuższym bokiem jest równy $\frac{1}{3}$. Jakie jest pole tego prostokąta?

Zadanie 2.1.5. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 8 cm, a ramię ma długość 12 cm. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych połowy kąta przy podstawie.

Zadanie 2.1.6. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 i 8. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta β, jaki tworzy wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego z krótszą przyprostokątną.

Zadanie 2.1.7. Tangens kąta ostrego w trapezie równoramiennym jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Stosunek długości podstaw tego trapezu jest równy $1:3$, a ramię ma długość $2\sqrt{3}$. Oblicz pole i obwód czworokąta.

Zadanie 2.1.8. Kwadrat podzielono na dwa różne prostokąty o odcięto z niego mniejszy prostokąt, w którym cosinus kąta zawartego między przekątną a krótszym bokiem ma wartość $\frac{\sqrt{10}}{10}$. W jakim stosunku został podzielony bok kwadratu?

Zadanie 2.1.9. Dany jest prostokąt $SOWA$ o bokach 12 cm i 8 cm. Na boku $\overline{AW}$ tego prostokąta zaznaczono trzy punkty L, I, N spełniające warunki $|AL| : |LW| = 1 : 2$, $|AI| : |IW| = 1 : 1$, $|AN| : |NW| = 2 : 1$. Wyznacz wartości sinusów kątów, jakie tworzą odcinki $\overline{SL}$, $\overline{SI}$, $\overline{SN}$ z dłuższym bokiem.

Zadanie 2.1.10. Krótsza przekątna trapezu prostokątnego tworzy z dłuższą podstawą kąt, którego sinus ma wartość $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. Oblicz pole i obwód tego czworokąta, jeżeli wiesz, że jedna podstawa jest dwukrotnie dłuższa od drugiej, a suma ich długości jest równa 18.

Zadanie 2.1.11. Dany jest trapez równoramienny, w którym ramię i krótsza podstawa mają po 12 cm. Cosinus kąta zawartego między wysokością trapezu a ramieniem ma wartość $0,6$. Jaki jest obwód tego trapezu?

Zadanie 2.1.12. Dane są trzy prostokąty, w których przekątne mają po 12 cm. Danę również sinusy kątów jakie przekątne te tworzą z dłuższymi bokami i są one równe odpowiednio: $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{\sqrt{11}}{6}$. Wyznacz wymiary tych prostokątów.

Zadanie 2.1.13. Krótsza przekątna o długości 7 podzieliła równoległobok o dłuższym boku równym 10 na dwa przystające trójkąty równoramienne. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego równoległoboku.

Zadanie 2.1.14. W trójkącie równoramiennym dane są długości boków i są one równe 12 i 16. Wyznacz wartość cosinusa kąta α, jaki tworzy wysokość poprowadzona na ramię z podstawą trójkąta. Czy zadania ma tylko jedno rozwiązanie?

Zadanie 2.1.15. Wyznacz równanie prostej $y = ax$, mając podaną wartość funkcji trygonometrycznej kąta, jaki tworzy ta prosta z dodatnią osią $\mathcal{O}x$:

1. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$,
2. $\cos\alpha = \frac{5}{6}$,
3. $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$,
4. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{7}$.

Zadanie 2.1.16. Tomek narysował wykres funkcji liniowej nachylonej do dodatniej osi $\mathcal{O}x$ pod takim kątem α, dla którego jest spełniona równość $\sin\alpha + \cos\alpha = 1,4$. wykres Tomka przechodzi przez punkt $A = (-4, 2)$. Wyznacz równanie prostej narysowanej przez Tomka.

Zadanie 2.1.17. Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 4. Tangens kąta nachylenia przekątnej tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy ma wartość $\sqrt{2}$. Jaka jest długość tej przekątnej?

Zadanie 2.1.18. Promienie słoneczne padają pod kątem $30°$. Odpowiedz na pytania:

a) Jak wysokie jest drzewo, jeśli cień przez nie rzucany ma długość $10\sqrt{3}$?

b) Jaką długość będzie miał Twój cień?

Zadanie 2.1.19. Dana jest równia pochyła o kącie nachylenia do poziomu $60°$. Po równi zsuwa się ciało o masie 50 dag. Jaki nacisk wywyiera to ciało na powierzchnię równi? Przyjmij, że wartość przyspieszenia ziemskiego to $g = 10$ m/s^2.

Zadanie 2.1.20. Dana jest równia pochyła o wysokości 30 cm i kącie nachylenia do poziomu $20°$. Wyznacz długość tej równi i zastanów się, jaki musiałby być kąt nachylenia do poziomu, aby przy takiej samej wysokości długość równi była dwukrotnie mniejsza.

Zadanie 2.1.21. Tomek rozłożył drabinę o długości 10 m pod kątem $60°$. DO jakiej wysokości sięga drabina?

2.2 Zadania o funkcjach trygonometrycznych dowolnego kąta

Zadanie 2.2.1. (R) Oblicz wartość liczbową każdego z poniższych wyrażeń, nie korzystając z tablic z wartościami funkcji trygonometrycznych ani z kalkulatora:

a) $\sin\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$,

b) $\sin\frac{3\pi}{4} \cdot \cos\frac{5\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$,

c) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{7\pi}{8}$,

d) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \cdot \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} \cdot \operatorname{tg}\frac{4\pi}{5} \cdot \operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}$,

e) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{10} \cdot \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}$.

Zadanie 2.2.2. Wyznacz wartość liczbową każdego z poniższych wyrażeń (nie korzystaj z tablic ani z kalkulatora):

a) $\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{ctg} 140° \cdot \operatorname{ctg} 150° \cdot \operatorname{ctg} 160°$,

b) $\sin^2 20° + \sin^2 30° + \sin^2 40° + \sin^2 230° + \sin^2 240° + \sin^2 250°$,

c) $(\cos^2 20° + \cos^2 250°) \cdot \operatorname{ctg} 20° \cdot \operatorname{ctg} 250°$,

d) $\frac{1}{\operatorname{ctg} 30°} \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} 40°} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 140°} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 250°}$.

Zadanie 2.2.3. (R) W miejsce a ($a \in \mathbb{R}_+$) wpisz taką wartość, aby poniższe równości były spełnione:

a) $\sin a\pi = \sin\frac{\pi}{3}$,

b) $\operatorname{tg} a\pi = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$,

c) $\cos a\pi = -\sin\frac{\pi}{4}$,

d) $\operatorname{ctg} a\pi = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

Zadanie 2.2.4. Oblicz $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta$, jeżeli $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$ i $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Zadanie 2.2.5. Oblicz sumę odwrotności sinusów kątów α i β, wiedząc, że $\alpha, \beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{ctg}\beta = 3$.

Zadanie 2.2.6. Wiadomo, że $\alpha \in (0, \pi)$ i $\sin\alpha = 2\cos\alpha$. Oblicz $2\sin\alpha - \cos^2\alpha$.

Zadanie 2.2.7. Wiadomo, że $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ i $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{1}{5}$. Wyznacz wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych kąta α.

Zadanie 2.2.8. Oblicz wartość funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, jeżeli wiesz, że $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$.

Zadanie 2.2.9. (R) Sinus kąta ostrego rombu ma wartość $\frac{5}{7}$. Jaką wartość ma cosinus kąta rozwartego tego samego rombu?

Zadanie 2.2.10. (R) W trapezie równoramiennym sinus kąta rozwartego jest równy $\frac{8}{9}$. Oblicz sumę sinusa i cosinusa kąta ostrego tego trapezu.

Zadanie 2.2.11. (R) Dany jest trapez o polu 35 cm^2 i sumie długości podstaw $17,5$. Wiadomo, że tangensy kątów rozwartych tego trapezu mają wartości $-1\frac{1}{3}$ oraz $-1\frac{3}{5}$. Wyznacz długości podstaw tego trapezu i sprawdź, czy można na tym trapezie opisać okrąg.

Zadanie 2.2.12. (R) Wykaż, że w każdym trójkącie prostokątnym suma kwadratów sinusów jego kątów wewnętrznych jest równa 2.

Zadanie 2.2.13. (R) Wykaż, że w dowolnym trapezie suma sinusów wszystkich kątów wewnętrznych jest dwukrotnie większa od sumy sinusów kątów ostrych trapezu.

2.3 Zadania o związkach między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Zadanie 2.3.1. (R) Dane są dwie liczby a oraz b. Która z nich jest większa, jeżeli $a = \sin^2 12° + \sin^2 13° + \sin^2 30° + \sin^2 77° + \sin^2 78°$, natomiast $b = \cos^2 22° + \cos^2 25° \cos^2 45° + \cos^2 65° + \cos^2 68°$?

Zadanie 2.3.2. Dana jest wartość cosinusa pewnego kąta ostrego α i jest ona równa $\frac{a}{2}$. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α i podaj, do jakiego przedziału musi należeć a.

Zadanie 2.3.3. Ramię końcowe kąta β jest położone w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych, a $\sin\beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. Jaka jest wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta$?

Zadanie 2.3.4. Ramię końcowe kąta β jest położone w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, a $\operatorname{tg}\beta = -5$. Jaka jest wartość wyrażenia $\sin\beta \cdot \cos\beta$?

Zadanie 2.3.5. Sprawdź, czy istnieje taki kąt β, który spełnia poniższe warunki:

a) $\operatorname{tg}\beta = 3$, $\sin\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

b) $\operatorname{ctg}\beta = \frac{4}{3}$, $\sin\beta + \cos\beta = \frac{7}{5}$,

a) $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$, $\cos\beta - \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

a) $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{5}$, $\sin^2\beta - \cos^2\beta = \frac{12}{13}$.

Zadanie 2.3.6. Oblicz $\sin^2\alpha + \cos^2\beta$, jeżeli $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$ i $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Zadanie 2.3.7. Dany jest kąt $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $\operatorname{tg}\alpha = 3\sin\alpha$. Oblicz $\sin\alpha + 2\cos\alpha$.

Zadanie 2.3.8. Wiadomo, że dla danego kąta ostrego α zachodzi równość $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{8}{27}$. Wyznacz wartości liczbowe poniższych wyrażeń dla tego samego kąta α:

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$,

b) $\frac{2}{\sin^2\alpha} + \frac{2}{\cos^2\alpha}$,

c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$,

d) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

Zadanie 2.3.9. Wpisz w miejsce kropek takie wyrażenia, aby równości były tożsamościami:

a) $\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} + \ldots = \frac{1}{\sin\gamma \cdot \cos\gamma}$,

b) $\frac{1+2\sin\gamma\cdot\cos\gamma}{\sin^2\gamma - \cos^2\gamma} = \ldots$,

c) $\left(\frac{1}{\cos^2\gamma} + \frac{1}{\sin^2\gamma}\right) \cdot \operatorname{tg}^2\gamma = \ldots$,

d) $\ldots \cdot \left(\operatorname{tg}\gamma + \frac{1}{\cos\gamma}\right) = \frac{1-\sin^2\gamma}{\cos\gamma}$.

Zadanie 2.3.10. (R) Dane są dwie liczby $a = \frac{\sin x}{\cos x - 1} - \frac{\sin x}{\cos x + 1}$ oraz $b = \frac{2m\cdot\operatorname{ctg} x}{1-\sin^2 x}$. Dla jakiej wartości parametru m zachodzi równość $a = b$?

Zadanie 2.3.11. Wiadomo, że sinus kąta nachylenia środkowej trójkąta do boku, na który została ona poprowadzona jest równy $\frac{5}{7}$. Jakie są wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta?

Zadanie 2.3.12. Wartość tangensa kąta rozwartego w trójkącie rozwartokątnym jest równa -4. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Zadanie 2.3.13. Krótsza przekątna równoległoboku jest prostopadła do boku o długości 8, a tangens kąta zawartego pomiędzy sąsiednimi bokami jest równy 2. Wyznacz długości obu wysokości oraz długość drugiego równoległoboku.

Zadanie 2.3.14. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4. Sinus kąta nachylenia przekątnej tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{1}{3}$. Wyznacz długość tej przekątnej oraz długość krawędzi bocznej.

Zadanie 2.3.15. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości 4. Cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{5}{13}$. Wyznacz długość krawędzi podstawy.

2.4 Zadania o wykresach i własnościach funkcji trygonometrycznych

Zadanie 2.4.1. Wyznacz okres podstawowy funkcji $f(x)$ określonej wzorem:

a) $f(x) = \sin 4x$,

b) $f(x) = \cos\frac{2}{3}x$,

c) $f(x) = 2\operatorname{tg} 2x$,

d) $f(x) = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{1}{4}x$.

Zadanie 2.4.2. (R) Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = 2\cos ax$. Wyznacz taką wartość a, aby okresem podstawowym tej funkcji była poniższa wartość:

a) 12π,

b) 8π,

c) $\frac{3\pi}{2}$,

d) $\frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 2.4.3. Podaj zbiór wartości funkcji $f(x)$ określonej wzorem:

a) $f(x) = \sin 4x + 4$,

b) $f(x) = -\cos 4x - 3$,

c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

d) $f(x) = -2|\sin x|$.

Zadanie 2.4.4. (R) Dobierz tak wartości współczynników a i b, aby funkcja określona wzorem $f(x) = a\sin x + b$ miała podany poniżej zbiór wartości:

1. $\langle -2, 4\rangle$,
2. $\langle -5, -3\rangle$,
3. $\langle 0, 1\rangle$,
4. $\langle -2, 6\rangle$.

Zadanie 2.4.5. (R) Dana jest funkcja określona równaniem $f(x) = a\sin bx + c$. Dobierz takie wartości współczynników a, b, c, aby zbiorem wartości tej funkcji był przedział $\langle 0, 4\rangle$ i aby $f\,()\, \frac{\pi}{3} = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x)$.

Zadanie 2.4.6. Narysuj wykresy funkcji o podanych wzorach i dziedzinach i wyznacz miejsca zerowe każdej funkcji:

a) $f(x) = \sin x$, dla $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$,

b) $f(x) = \cos x$, dla $x \in \left\langle -\pi, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$,

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, dla $x \in (0, 2\pi)$,

d) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, dla $x \in (-pi, pi)$.

Zadanie 2.4.7. Narysuj wykresy funkcji i dla każdej z nich określ jej okres podstawowy:

a) $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2$,

b) $f(x) = \cos 2x - 1$,

c) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$,

d) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x - 1$.

Zadanie 2.4.8. (R) Narysuj wykresy funkcji o podanych wzorach dla $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$:

a) $f(x) = 2 \cdot |\sin x|$,

b) $f(x) = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$,

c) $f(x) = |\sin 2x| - 2$,

d) $f(x) = 3 \cdot |\operatorname{tg} x|$.

Zadanie 2.4.9. Zapisz wzory podanych funkcji w prostszej postaci, a potem narysuj ich wykresy:

a) $f(x) = \sin \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$,

b) $f(x) = 2 \sin x \cdot \cos x$,

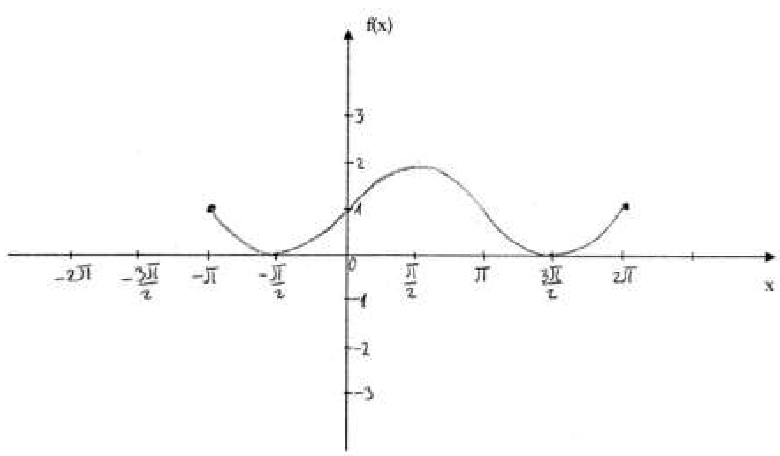
c) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$,

d) $f(x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

Zadanie 2.4.10. Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = a \cdot \sin\left(x - \frac{a\pi}{2}\right)$ dla podanych wartości a:

1. $a = 1$,
2. $a = 2$.

Zadanie 2.4.11. Na podstawie wykresu funkcji $f(x)$ określi dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji oraz narysuj wykres funkcji $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.



Zadanie 2.4.12. Zastanów się, jakie może być równanie funkcji $f(x)$ z poprzedniego zadania.

Zadanie 2.4.13. Podaj wzór funkcji trygonometrycznej $f(x)$, jeżeli wiesz, że jej okresem podstawowym jest 4π, zbiorem wartości jest przedział $\langle 0, 2\rangle$, a jej wykres przechodzi przez punkt $A = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Zadanie 2.4.14. Podaj wzór funkcji trygonometrycznej $f(x)$, jeżeli wiesz, że jest to funkcja parzysta, jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -2, 2\rangle$, a okres podstawowy jest równy $\frac{\pi}{2}$.

2.5 Zadania z zastosowaniem wzorów na sumę i różnicę funkcji trygonometrycznych oraz wzorów na funkcje sumy i różnicy kątów

Zadanie 2.5.1. (R) Dany jest $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, gdzie $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Wyznacz wartości każdej z poniższych funkcji:

a) $\sin(\alpha - \beta)$,

b) $\sin(\beta + \alpha)$,

c) $\cos(\alpha + \beta)$,

d) $\cos(\beta - \alpha)$.

Zadanie 2.5.2. (R) Wyznacz wartości liczbowe poniższych wyrażeń, korzystając ze wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów:

a) $\sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{12} \cdot \sin\frac{\pi}{4}$,

b) $\cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{5\pi}{24} - \sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{24}$,

c) $\cos\frac{5\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$,

d) $\frac{\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12} - \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12} \cdot \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}$.

Zadanie 2.5.3. (R) Wyznacz wartości liczbowe poniższych wyrażeń, korzystając ze wzorów na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta:

a) $\frac{1}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12}$,

b) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{12}$,

c) $3\sin\frac{7\pi}{9} - 4\sin^3\frac{7\pi}{9}$,

d) $4\cos^3\frac{5\pi}{18} - 3\cos\frac{5\pi}{18}$.

Zadanie 2.5.4. (R) Nie korzystając z tablic z wartościami funkcji trygonometrycznych ani z kalkulatora, wykaż prawdziwość poniższych równości:

a) $\sin\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

b) $\sin\frac{11\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zadanie 2.5.5. (R) Udowodnij następujące tożsamości trygonometryczne:

a) $\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{2}{\sin 2\alpha}\right)^2$,

b) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{4\operatorname{ctg} 2\alpha}{\sin 2\alpha}$,

c) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$,

d) $(s\in^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$.

Zadanie 2.5.6. (R) Sprawdź, czy poniższe równości są tożsamościami trygonometrycznymi:

a) $\frac{\sin 5x - \sin x}{\cos 2x + \cos 4x} = 2\sin x$,

b) $\frac{4\sin x \cdot \cos 2x}{\cos 3x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x$,

c) $-\frac{1}{2}\cdot(\cos^2 5x - \cos^2 x) = \frac{1}{2}\cdot\sin 6x\cdot\sin 4x$,

d) $\sin^2 3x - \sin^2 x = \sin 4x \cdot \sin 2x$.

Zadanie 2.5.7. (R) W każdej z poniższych równości dobierz takie wartości współczynników a oraz b $(a, b \in \mathbb{C})$, aby otrzymać równości prawdziwe:

a) $\sin ax - \sin bx = 2\cos 4x \cdot \sin x$,

b) $\sin ax + \cos bx = 2\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}$,

c) $\cos ax - \cos bx = -2\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}$.

Zadanie 2.5.8. (R) Zapisz w postaci jednej funkcji trygonometrycznej każde z poniższych wyrażeń:

a) $4\cos^3 3x - 3\cos 3x$,

b) $\frac{\operatorname{ctg}^3\frac{x}{3} - 3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}{3\operatorname{ctg}^3\frac{x}{3} - 1}$,

c) $\frac{\operatorname{ctg}^2 2x - 1}{2\operatorname{ctg} 2x}$,

d) $4\sin x\cdot\cos^3 x + 4\sin^3 x\cdot\cos x$.

2.6 Zadania o równaniach i nierównościach trygonometrycznych

Zadanie 2.6.1. (R) ROzwiąż równanie:

a) $\sin^2 x - \frac{3}{4} = 0$,

b) $\cos^2 x - \frac{3}{4} = 0$,

c) $\operatorname{tg}^2 x - 7 + 4\sqrt{3} = 0$,

d) $\operatorname{ctg}^2 - 7 - 4\sqrt{3} = 0$.

Zadanie 2.6.2. (R) Wyznacz zbiór rozwiązań każdego z poniższych równań:

a) $\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x = 0$,

b) $\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$,

c) $\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} = 0$,

d) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$.

Zadanie 2.6.3. (R) Podaj rozwiązanie każdego z poniższych równań mieszczące się w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$:

a) $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = 0$,

b) $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = 0$,

c) $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\operatorname{ctg}} = 0$,

d) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 0$.

Zadanie 2.6.4. (R) Rozwiąż równanie $\sin x = a$, gdzie a jest miejsce zerowym wielomianu $W(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$.

Zadanie 2.6.5. (R) Rozwiąż równanie $\cos^2 x - d = 0$, gdzie d jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = -4x + 2$.

Zadanie 2.6.6. (R) Wyznacz rozwiązania poniższych równań:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$,

b) $\operatorname{tg}^2\left(x + {}^{\pi}2\right) - 1 = 0$,

c) $\operatorname{ctg}^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$,

d) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Zadanie 2.6.7. (R) Podaj przykłady czterech równań trygonometrycznych, wiedząc, że do zbioru rozwiązań każdego z nich należy wartość $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Zadanie 2.6.8. (R) Wyznacz takie wartości parametru m, dla których równanie $\operatorname{ctg}^2 mx - m = 0$ ma dwa rozwiązania postaci $x_1 = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$.

Zadanie 2.6.9. (R) W każdym z równań uzupełnij brakujące współczynniki a oraz b w taki sposób, aby rozwiązaniami tych równań były zapisane obok wartości:

a) $2\sin(ax + b) = 1$, $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $x_2 = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{C}$,

b) $\cos(ax + b) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 4k\pi$, $x_2 = -\frac{3\pi}{2} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{C}$,

c) $\operatorname{tg}(ax + b) = 2 - \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{C}$,

d) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}(ax + b) = 1$, $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{C}$.

Zadanie 2.6.10. (R) Dla jakiej wartości parametru m równanie $m \sin mx = 1$ ma taki sam zbiór rozwiązań, jak równanie $(\operatorname{tg} x - 2 + \sqrt{3}) \cdot (\operatorname{tg} x - 2 - \sqrt{3}) = 0$?

Zadanie 2.6.11. (R) Podaj przykład równania, którego rozwiązaniem są podane niżej wyrażenia:

a) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_2 = k\pi$, $k \in \mathbb{C}$,

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{C}$.

Zadanie 2.6.12. (R) Podaj interpretację graficzna każdej z poniższych nierówności w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

a) $\sin x > \frac{1}{2}$,

b) $\cos x \leqslant 0$,

c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > 0$,

d) $\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{2}\right) < 1$.

Zadanie 2.6.13. (R) Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $\sin^2 \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \leqslant 0$.

Zadanie 2.6.14. (R) Wyznacz taką wartość parametru a $(a \in \mathbb{R}_+)$, aby rozwiązaniem nierówności $\operatorname{tg}^2 ax - \operatorname{tg} ax < 0$ był przedział $\left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{C}$.

Zadanie 2.6.15. (R) Rozwiąż równania, stosując wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta:

a) $4 \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$,

b) $2 \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$,

c) $\frac{6 \operatorname{ctg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = \sqrt{3}$,

d) $3 \sin \frac{x}{2} - 4 \sin^3 \frac{x}{2} = 1$.

Zadanie 2.6.16. (R) Rozwiąż równania, stosując wzory na sumę lub różnicę funkcji trygonometrycznych:

a) $\sin 2x + \sin 4x - \sin 3x = 0$,

b) $\sin 4x - \sin 2x - \cos 3x = 0$,

c) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$,

d) $\cos 2x - 2 \cos x + \cos 4x = 0$.

Zadanie 2.6.17. (R) Wpisz brakujące współczynniki a, b, c $(a, b, c \in \mathbb{C})$ w równaniu $\sin ax + \sin bx - \cos cx = 0$, aby otrzymać równanie równoważne równaniu $\cos x \cdot \left(\sin 4x - \frac{1}{2}\right) = 0$. Wyznacz zbiór rozwiązań obu równań.

Zadanie 2.6.18. (R) W równaniu $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x+d)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(x+d)} = 0$ wpisz taką wartość współczynnika d, aby rozwiązanie tego równania miało postać $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{C}$.

Zadanie 2.6.19. (R) Wyznacz taką wartość parametru a, dla którego równanie $\frac{\mathrm{tg}(2x-1)-\mathrm{tg}(x-2a)}{1+\mathrm{tg}(2x-a)\cdot\mathrm{tg}(x-2a)}\cdot\sqrt{3}=1$ ma rozwiązanie postaci $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbb{C}$.

Zadanie 2.6.20. (R) Dane jest równanie $\cos\left(ax-\frac{\pi}{6}\right)-\cos ax\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin ax\cdot\sin\frac{\pi}{6}=0$. Dla jakiej wartości a rozwiązaniem tego równania są liczby postaci $x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{C}$?

Zadanie 2.6.21. (R) Dane jest równania $\mathrm{ctg}\, x+\mathrm{ctg}(mx+nx)=0$. Dobierz takie wartości współczynników m i n, dla których liczby postaci $x=(k+1)\cdot\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{C}$ są rozwiązaniem tego równania.

Zadanie 2.6.22. (R) Wyznacz takie wartości parametru k, dla którego równanie $\cos 3x=\frac{2k^2+k-1}{k-1}$ ma rozwiązanie.

Zadanie 2.6.23. (R) Tomek napisał równanie $2\sin x=\frac{3m}{m^2-1}$. Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie Tomka ma rozwiązanie.

Zadanie 2.6.24. (R) Tomek napisał równanie z parametrem m: $\sin 3x-2=m^2-3m-5$. Dla jakich wartości parametru m równanie tonie ma rozwiązania?

Zadanie 2.6.25. (R) Dana jest funkcja $f(x)=x^2+\frac{x}{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{6}}{4}$. Rozwiąż równanie $\cos\frac{y}{x}=x$, w którym x jest miejscem zerowym funkcji $f(x)$.

Zadanie 2.6.26. (R) Rozwiąż poniższe nierówności:

a) $4\sin x\cos x<0$,

b) $\cos^2 2x-\sin^2 2x>\frac{1}{2}$,

c) $\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x\geqslant 0$,

d) $\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x\leqslant\frac{1}{2}$.

Zadanie 2.6.27. (R) Rozwiąż poniższe nierówności, ale podaj tylko te rozwiązania, które zawierają się w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$:

a) $\sin x\cos\frac{x}{2}-\cos x\sin\frac{x}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\cos x\cos 2x-2\sin^2 x\cos x<\frac{1}{2}$,

c) $\frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x}\geqslant 1$,

d) $\frac{\mathrm{tg}\, 4x-\mathrm{tg}\, 2x}{1-\mathrm{tg}\, 4x\cdot\mathrm{tg}\, 2x}<0$.

Zadanie 2.6.28. (R) Wiadomo, że rozwiązaniem nierówności $4\sin bx\cos bx\geqslant 1$ jest przedział $\left\langle\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\right\rangle$, gdzie $k\in\mathbb{C}$. Jaką wartość przyjmuje współczynnik b?

Zadanie 2.6.29. (R) Rozwiąż nierówność $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\geqslant m$, gdzie m jest rozwiązaniem równania $m^3-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}$.

Zadanie 2.6.30. (R) Tomek napisał równanie $\sqrt{3}\sin x+\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^3 x+\cdots=m-3$, w którym lewa strona jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie Tomka ma rozwiązanie.

Zadanie 2.6.31. (R) Rozwiąż poniższe równania:

a) $2\cos x + \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos^3 x + \cdots = 0$,

b) $2\sin 2x + \sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin^3 2x + \cdots = 0$.

Zadanie 2.6.32. (R) Dane jest równanie $2\sin^2 x + m\sin x - \sin x = \frac{m}{2}$. Rozwiąż to równanie dla $m = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

2.7 Zadania o twierdzeniu sinusów i twierdzeniu cosinusów

Zadanie 2.7.1. (R) Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ma długość 8 cm. Miara jednego z kątów wewnętrznych tego trójkąta jest równa $155°$. Wyznacz długości przyprostokątnych.

Zadanie 2.7.2. (R) W pewnym trójkącie równoramiennym jeden z kątów ma miarę czterokrotnie większą od drugiego, a średnica okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 24 cm. jakie są długości boków trójkąta?

Zadanie 2.7.3. (R) Promień okręgu opisanego na trójkącie o najdłuższym boku 14 jest równy 8. Jaka jest miara największego kąta w tym trójkącie?

Zadanie 2.7.4. (R) W trójkącie równoramiennym rozwartokątnym dany jest tangens kąta rozwartego równy -3 oraz długość najdłuższego boku równa 5. Jaka jest długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie?

Zadanie 2.7.5. (R) W trapezie równoramiennym dłuższa podstawa ma długość 12 cm, a przekątna 8 cm. Kąt nachylenia przekątnej do dłuższej podstawy ma miarę $30°$. Wyznacz długość drugiej podstawy oraz długość ramienia tego trapezu.

Zadanie 2.7.6. (R) W pewnym równoległoboku o krótszej wysokości 8 cm kąt zawarty pomiędzy tą wysokością a krótszą przekątną o długości 14 ma miarę $50°$. POnadto wiadomo, że krótsza przekątna jest prostopadła do krótszego boku. Jakie są długości boków tego równoległoboku?

Zadanie 2.7.7. (R) Tomek narysował dwa romby: jeden o kącie $45°$ i krótszej przekątnej 16 cm, drugi o kącie $135°$ i dłuższej przekątnej 16 cm. Wyznacz różnicę długości boków tych rombów.

Zadanie 2.7.8. (R) Tomek narysował trzy trójkąty: LIN o bokach 10 cm, 8 cm i 7 cm, KOS o bokach 12 cm, 9 cm i 5 cm oraz RAK o bokach 14cm, 12 cm i 7 c. Czy wśród tych trójkątów są trójkąty rozwartokątne?

Zadanie 2.7.9. (R) W pewnym trójkącie ostrokątnym różnobocznym długości boków (w cm) są liczbami całkowitymi. Dwa boki tego trójkąta mają długość 8 cm i 12 cm. Jak może być długość trzeciego boku?

Zadanie 2.7.10. (R) Długości dwóch dłuższych boków trójkąta są równe 6 i 4, a cosinus najmniejszego kąta tego trójkąta ma wartość $\frac{1}{6}$. Jaką długość ma środkowa poprowadzona na najdłuższy bok?

Zadanie 2.7.11. (R) Oblicz długości przekątnych w sześciokącie foremnym o boku 12.

Zadanie 2.7.12. (R) W pewnym równoległoboku stosunek długości przekątnych jest równy $1:2$. Dłuższa przekątna ma długość 6 cm, a miara jednego z kątów wewnętrznych jest równa $135°$. Jakie są długości boków tego równoległoboku?

Zadanie 2.7.13. (R) W trapezie równoramiennym o ramieniu 4 i dłuższej podstawie 8 cotangens kąta nachylenia przekątnej do dłuższej podstawy ma wartość $2\sqrt{2}$. Jaka jest długość tej przekątnej?

3

Funkcja kwadratowa

4

Funkcja liniowa

5

Funkcje wymierne

5.1 Zadania o dziedzinie i miejscach zerowych funkcji wymiernej

6

Geometria analityczna

6.1 Zadania o wektorach

Zadanie 6.1.1. Dany jest punkt $P = (2, -7)$ oraz wektor $\overrightarrow{PR}$. Wyznacz współrzędne punktu R, jeżeli:

1. $\overrightarrow{PR} = [1, 8]$,
2. $\overrightarrow{PR} = [\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}]$,
3. $\overrightarrow{PR} = [-9, 9]$,
4. $\overrightarrow{PR} = [-7, 2]$.

Zadanie 6.1.2. Jakie mogą być współrzędne punktów M i N, które są końcami wektora $\overrightarrow{MN} = [-4, 2]$? POdaj trzy różne rozwiązania.

Zadanie 6.1.3. Zaznacz w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie trzy niewspółliniowe punkty L, E, W i wyznacz współrzędne wektorów:

1. $\overrightarrow{LE} + \overrightarrow{EW}$,
2. $3 \cdot \overrightarrow{LW}$,
3. $\overrightarrow{WE} + \overrightarrow{EL}$,
4. $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{LE} + \overrightarrow{LW}$.

Zadanie 6.1.4. Dany jest punkt $K = (2, -2)$ oraz wektor $\overrightarrow{KL}$ o długości 5. Podaj współrzędne trzech różnych punktów L, które mogą być końcem wektora $\overrightarrow{KL}$.

Zadanie 6.1.5. Dane są wektory $\overrightarrow{AB} = [2, k^2 - 2k - 3]$ i $\overrightarrow{CD} = [2m, -1]$. Wyznacz takie wartości parametrów k i m, dla których są spełnione poniższe warunki:

1. wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe,
2. wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są przeciwne,
3. $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{CD}$,
4. $\overrightarrow{CD} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

Zadanie 6.1.6. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym wierzchołek $A = (-4, 4)$. Tomek obliczył współrzędne środka S podstawy $\overline{AB}$ i otrzymał $\left(-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ oraz współrzędne wektora $\overrightarrow{SC} = \left[4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right]$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B oraz C tego trójkąta.

Zadanie 6.1.7. Dane są współrzędne trzech wierzchołków równoległoboku $PUMA$: $P = (-4, 1)$, $U = (0, -2)$, $M = (2, 2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka A oraz współrzędne punktu R, w którym przecinają się przekątne tego równoległoboku.

Zadanie 6.1.8. Tomek zaznaczył w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A = (-3, 4)$, $B = (-2, 3)$, $C = (4, -2)$. Podaj współrzędne wektorów przeciwnych do:

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$,
2. $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CA} - 2 \cdot \overrightarrow{BA}$.

Zadanie 6.1.9. W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznaczono trzy niewspółliniowe punkty $A = (-3, 2)$, $B = (4, -2)$, $C = (a, b)$. Wiadomo, że wektor $\overrightarrow{BC}$ ma współrzędne $[-2, -3]$. Wyznacz współrzędne punktu C oraz współrzędne wektora $\overrightarrow{AC}$.

Zadanie 6.1.10. Dane są trzy punkt $A = (-2, 3)$, $B = (-5, 4)$. Twoim zadaniem jest wyznaczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{u}$, który jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{AB}$ i którego końcem jest punkt:

1. A,
2. B.

Zadanie 6.1.11. Wyznacz współrzędne czterech różnych wektorów o początku w środku okręgu o równaniu $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$ i końcu, który jest punktem należącym do okręgu o równaniu $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$.

Zadanie 6.1.12. Wyznacz współrzędne czterech różnych wektorów, których początkiem jest środek okręgu o równaniu $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 9 = 0$, a końcem jest punkt należący do paraboli o równaniu $y = x^2 - 3x - 4$.

Zadanie 6.1.13. Tomek zaznaczył w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkt $S = (1, 1)$ oraz punkty A, B i C należące do paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$. Wiadomo, że $\overrightarrow{SA} = [1, -4]$, $\overrightarrow{SB} = [-2, -1]$, $\overrightarrow{SC} = [-4, 11]$. Wyznacz wartości współczynników a, b, c.

Zadanie 6.1.14. Dany jest równoległobok $KUNA$. Wiadomo, że wektor $\overrightarrow{AU} = [2,4]$, $\overrightarrow{KU} = [-3,3]$ oraz $A = (-2,5)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków K, U, N równoległoboku oraz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AK}$ i $\overrightarrow{NU}$.

Zadanie 6.1.15. Punkty $D = (-2,2)$, $E = (3,0)$, $F = (-1,-3)$ są odpowiednio środkami boków $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trójkąta ABC. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

6.2 Zadania o prostej, paraboli i okręgu

Zadanie 6.2.1. Zapisz równanie ogólne prostej, mając jej równanie kierunkowe:

1. $y = 3x - 5$,
2. $y = \frac{2}{3}x - 2$,
3. $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{10}$,
4. $y = -\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}$,
5. $y = -3x + \frac{3}{4}$,
6. $y = 4x + 1\frac{1}{3}$.

Zadanie 6.2.2. Dane są trzy współliniowe punkty $A = (-4,2)$, $B = (7,-4)$ i C. Wyznacz współrzędne punktu C, jeżeli wiesz, że:

1. $C = (m,0)$,
2. $C = (k,5)$,
3. $C = (1,n)$,
4. $C = (p,2p)$.

Zadanie 6.2.3. Wyznacz równanie ogólne prostej prostopadłej do wektora $\overrightarrow{AB}$ i przechodzącej przez punkt P, jeżeli:

1. $\overrightarrow{AB} = [2,-5]$, $P = (-1,3)$,
2. $\overrightarrow{AB} = [-3,-6]$, $P = (4,-3)$,
3. $\overrightarrow{AB} = [-5,2]$, $P = (-6,-1)$,
4. $\overrightarrow{AB} = [2,8]$, $P = (4,2)$.

Zadanie 6.2.4. Wyznacz równanie ogólne prostej równoległej do wektora $\overrightarrow{CD}$ i przechodzącej przez punkt M, jeżeli:

1. $\overrightarrow{CD} = [3,6]$, $M = (2,-2)$,
2. $\overrightarrow{CD} = [-4,2]$, $M = (8,-3)$,
3. $\overrightarrow{CD} = [1,-2]$, $M = (4,4)$,

4. $\overrightarrow{CD} = [-4, -1]$, $M = (-4, -8)$,

Zadanie 6.2.5. Podaj współrzędne trzech punktów, których odległość od prostej o równaniu ogólnym $3x + 4y - 2 = 0$ jest równa 2.

Zadanie 6.2.6. W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznaczono punkty $A = (-4, 6)$, $B = (5, -3)$ oraz punkt C położony na prostej AB i spełniającej warunek $|AC| : |CB| = 1 : 3$. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do AB i przechodzącej przez punkt C.

Zadanie 6.2.7. Dana jest prosta o równaniu ogólnym $-4x + 3y + 1 = 0$. Znajdź współrzędne końców odcinka $\overline{PR}$ o długości 3 równoległego do danej prostej i położonego w odległości 3 od tej prostej.

Zadanie 6.2.8. W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie zaznacz cztery dowolne punkty i wyznacz odległość każdego z nich od prostej o równaniu ogólnym $2x - 4y + 1 = 0$.

Zadanie 6.2.9. wiadomo, że trzy boki pewnego równoległoboku są zawarte w prostych o równaniach $\frac{1}{2}x - y - 3 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$, $4x + y + 2 = 0$. Jaką postać może mieć równanie prostej zawierającej czwarty bok tego równoległoboku? Podaj cztery różne równania.

Zadanie 6.2.10. (R) Wiadomo, że wysokość rombu ma długość $\sqrt{10}$. Jakie mogą być równania prostych zawierających przeciwległe boki tego rombu?

Zadanie 6.2.11. (R) Dana jest prosta o równaniu ogólnym $6x - 8y + 3 = 0$. Znajdź równanie prostej równoległej do danej prostej, jeżeli wiadomo, że odległość pomiędzy prostymi jest równa promieniowi okręgu o równaniu $x^2 - x2 + y^2 + 6y - 6 = 0$.

Zadanie 6.2.12. (R) Punkty przecięcia się wykresu funkcji o równaniu $f(x) = x^2 - x - 2$ z prostą o równaniu $g(x) = 3x + 3$ są końcami przekątnej kwadratu. Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym kwadracie.

Zadanie 6.2.13. (R) Dane są funkcje kwadratowe o równaniach $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ i $g(x) = x^2 + 4x - 1$. Punkty przecięcia się wykresów tych funkcji są końcami tej samej przekątnej kwadratu. Zapisz równanie kierunkowe i ogólne prostej zawierającej drugą przekątną tego kwadratu.

Zadanie 6.2.14. (R) Punkty przecięcia się paraboli o równaniu $y = x^2 - 2x - 8$ z osiami prostokątnego układu współrzędnych na płaszczyźnie są wierzchołkami pewnego trójkąta. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta po przesunięciu o wektor $\overrightarrow{u}$, jeżeli:

1. $\overrightarrow{u} = [2, 3]$,
2. $\overrightarrow{u} = [-2, 3]$,
3. $\overrightarrow{u} = [-2, -3]$,
4. $\overrightarrow{u} = [2, -3]$.

Zadanie 6.2.15. (R) Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie o środkach w punktach S i P. Wiadomo, że wektor $\overrightarrow{SP}$ ma współrzędne $[6, 0]$, a punkt styczności okręgów ma współrzędne $(0, 4)$. Znajdź równania tych okręgów oraz odległość ich środków od początku układy współrzędnych.

Zadanie 6.2.16. (R) Okrąg o równaniu $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 9 = 0$ został przesunięty o wektor $\overrightarrow{AB}$, Wyznacz równanie obrazu tego okręgu, jeżeli:

1. $A = (-2, 3)$, $B = (4, 2)$,
2. $A = (-3, -2)$, $B = (5, -4)$.

Zadanie 6.2.17. (R) Znajdź równanie obrazu okręgu $x^2+2x+y^2-4y-4 = 0$ w symetrii względem prostej o równaniu:

1. $y = 3$,
2. $x = 3$,
3. $y = x$,
4. $y = 2x - 3$.

6.3 Zadania o wielokątach w układzie współrzędnych

Zadanie 6.3.1. (R) Zaznacz w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie trzy dowolne punkty, które będą wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Narysuj ten trójkąt o oblicz długości wszystkich jego środkowych.

Zadanie 6.3.2. (R) Przekątna kwadratu $LASY$ o polu 10 jest zawarta w prostej o równaniu ogólnym $-2x + y - 3 = 0$. Jednym z końców tej przekątnej jest punkt $L = (-2, -1)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.

Zadanie 6.3.3. (R) Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach $x - y + 2 = 0$, $x + y + 6 = 0$, $2x + y + 4 = 0$. Wyznacz współrzędne punktów, które są środkami boków trójkąta oraz długości środkowych.

Zadanie 6.3.4. (R) Boki trójkąta są zawarte w prostych o równaniach $2x - y + 3 = 0$, $-3x - y + 1 = 0$ i $-9x - y + 3 = 0$. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 6.3.5. (R) Dany jest okrąg o równaniu $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ oraz punkt P o odciętej 2, który jest jednym z wierzchołków prostokąta $PUMA$ wpisanego w podany okrąg. Wiadomo, że prosta $x = 4$ jest jedną z osi symetrii tego prostokąta. Wyznacz współrzędne prostokąta $PUMA$ i oblicz jego pole.

Zadanie 6.3.6. (R) Tomek narysował w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie romb, którego wierzchołki oznaczył literami R, O, M, B. Wiadomo, że punkt B ma współrzędne $(4, 5)$, a punkt przecięcia przekątnych rombu ma współrzędne $(1, 2)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków oraz pole rombu Tomka.

Zadanie 6.3.7. (R) Tomek narysował romb, którego wierzchołki oznaczył literami K, O, T, Y. Punkt K ma współrzędne $(4, 5)$, a środek boku $\overline{KO}$ ma współrzędne $(0, 6)$. Wyznacz współrzędne brakujących wierzchołków rombu $KOTY$ oraz jego obwód.

Zadanie 6.3.8. (R) Dany jest romb $ABCD$. Punkty $E = (-1, 2)$, $F = (3, 6)$ są środkami dwóch sąsiednich boków tego rombu, a punkt $O = (2, 3)$ jest środkiem koła wpisanego w romb. Wyznacz współrzędne wierzchołków rombu $ABCD$.

Zadanie 6.3.9. (R) Środek koła wpisanego w trójkąt równoboczny ma współrzędne $(0,2)$, a jednym z wierzchołków tego trójkąta jest punkt $(4,-1)$. Jakie jest pole tego trójkąta?

Zadanie 6.3.10. (R) Prosta o równaniu $y = 2x - 3$ zawiera jeden z boków prostokąta $KUNA$ p polu 20. Wiadomo, że wierzchołek K ma współrzędne $(0,-3)$, a wierzchołek U ma współrzędne $(4,5)$. Jakie są współrzędne pozostałych wierzchołków prostokąta $KUNA$?

Zadanie 6.3.11. (R) Dwa boki prostokąta zawierają się w prostych o równaniach $y = -2x + 5$ i $y = -2x - 1$. Wyznacz długości boków, które nie są zawarte w tych prostych.

Zadanie 6.3.12. (R) Punkty $A = (-3,-5)$ i $B = (2,5)$ są środkami przeciwległych boków prostokąta $KOTY$, którego pole jest równe 25. Jakie są współrzędne wierzchołków prostokąta?

Zadanie 6.3.13. (R) Punkty $O = (-2,-8)$ i $A = (2,4)$ są końcami tej samej przekątnej rombu $KOMA$. Pole rombu jest równe 40. Wyznacz współrzędne wierzchołków K i M.

Zadanie 6.3.14. (R) Punkty $A = (-2,3)$ i $O = (4,-3)$ są końcami krótszej przekątnej rombu $SOWA$. Druga przekątna jest dwukrotnie dłuższa. Twoim zadaniem jest:

1. wyznaczenie równań prostych zawierających przekątne rombu,
2. obliczenie pola rombu,
3. wyznaczenie długości boku i wysokości rombu.

Zadanie 6.3.15. (R) Punkty $A = (-1,2)$ i $B = (-3,-4)$ są kolejnymi wierzchołkami rombu $ABCD$, a punkt $P = (1,0)$ jest punktem przecięcia się jego przekątnych. Twoim zadaniem jest wyznaczenie:

1. współrzędnych pozostałych wierzchołków rombu,
2. równania prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka A na bok $\overline{BC}$,
3. odległości punktu P od każdego z boków rombu.

Zadanie 6.3.16. (R) Punkty $A = (-6,2)$ i $B = (3,4)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego BAC, w którym przyprostokątnymi są boki $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C oraz pole tego trójkąta.

Zadanie 6.3.17. (R) Punkty przecięcia wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 3$ z osiami prostokątnego układu współrzędnych są wierzchołkami trójkąta. Wyznacz pole tego trójkąta oraz długość środkowej poprowadzonej na najdłuższy bok.

Zadanie 6.3.18. (R) Dany jest trójkąt ROK. Punkt $M = (12,2)$ jest środkiem boku $\overline{RK}$, punkt $L = (1,0)$ jest środkiem boku $\overline{KO}$, a punkt $P = (0,-2)$ jest środkiem boku $\overline{RO}$. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta oraz równania prostych zawierających boki tego trójkąta.

Zadanie 6.3.19. (R) Długość podstawy $\overline{BC}$ w trójkącie równoramiennym ABC jest równa 12. Wierzchołek A ma współrzędne $(3,3)$, a środek podstawy $\overline{BC}$ ma współrzędne $(-2,-2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C.

Zadanie 6.3.20. (R) Punkty $A = (-4, 2)$, $B = (2, 6)$, $C = (-1, -6)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka D oraz długości przekątnych tego równoległoboku.

Zadanie 6.3.21. (R) Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są punkty przecięcia paraboli o równaniu $y = x^2 - x - 6$ z osią $\mathcal{O}x$ prostokątnego układu współrzędnych na płaszczyźnie oraz punkty przecięcia tej samej paraboli z prostą o równaniu $2x - y - 2 = 0$.

Zadanie 6.3.22. (R) Jakie jest pole trójkąta, którego jeden wierzchołek pokrywa się z wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = x^2 - 2x - 1$, a dwa pozostałe wierzchołki są punktami wspólnymi tej paraboli z prostą o równaniu $y = -2x + 3$.

Zadanie 6.3.23. (R) Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (1, 2)$, $B = (-2, -2)$ i $C = (m + 1, 4)$. Wiadomo, że obwód tego trójkąta jest równy $7 + 3\sqrt{5}$. Jaka jest wartość współczynnika m?

Zadanie 6.3.24. (R) Dane są punkty $A = (-3, 2)$ i $B = (2, 2)$. Odcinek AB jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego ABC. Wyznacz takie wartości m, dla których punkt $C = (m, 1)$ jest wierzchołkiem tego trójkąta.

7

Wielomiany jednej zmiennej

7.1 Zadania o działaniach na wielomianach oraz równości wielomianów

Zadanie 7.1.1. Dane są wielomiany $F(x) = -x^4 + 4x^2 - 5x$, $G(x) = 4x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 2$, $H(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x - 7$. Znajdź taki wielomian $W(x)$, który jest równy:

1. sumie wielomianów $G(x)$ i $H(x)$,
2. sumie wielomianów $F(x)$ i $G(x)$,
3. różnicy wielomianów $G(x)$ i $H(x)$,
4. różnicy wielomianów $G(x)$ i $F(x)$.

Zadanie 7.1.2. Dany jest wielomian $W(x) = 3x^3 + 2x^2 - x$. Jaki wielomian $P(x)$ należy dodać do wielomianu $W(x)$, aby otrzymać wielomian $H(x)$, jeżeli:

1. $H(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 1$,
2. $H(x) = x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 5$,
3. $H(x) = -2x^4 - x^3 - 2x^2 - x - 3$,
4. $H(x) = -x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x$?

Zadanie 7.1.3. Dany jest wielomian $W(x) = x^2 - 1$. Dzielimy wielomian $P(x)$ przez dany wielomian $W(x)$ o otrzymujemy wielomian $H(x)$. Znajdź wielomian $P(x)$, jeżeli:

1. $H(x) = x^2 + 3$,
2. $H(x) = -2x^2 + x - 1$,
3. $H(x) = 3x^3 - x$,

4. $H(x) = x^2 + x - 1$.

Zadanie 7.1.4. Wyznacz wielomian $W(x)$, który jest ilorazem wielomianów $P(x)$ i $H(x) = x^2 - 1$, jeżeli:

1. $P(x) = x^5 + 4x^3 - x^2 - 5x + 1$,
2. $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 4$,
3. $P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 3$,
4. $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$.

Zadanie 7.1.5. Oblicz iloraz wielomianów $W(x)$ i $P(x)$, jeżeli:

1. $W(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, $P(x) = x - 3$,
2. $W(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$, $P(x) = x + 1$,
3. $W(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$, $P(x) = x - 5$,
4. $W(x) = x^3 - 2x^2 - 21x - 18$, $P(x) = x^2 - 5x - 6$,
5. $W(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$, $P(x) = x^2 - 3x - 4$,
6. $W(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$, $P(x) = x^2 + 2x + 1$.

Zadanie 7.1.6. Wielomian $W(x)$ podzielono przez wielomian $P(x) = x^2 + 3$ i otrzymano iloraz $H(x)$ oraz resztę $R(x)$. Wyznacz wielomian $W(x)$, jeżeli:

1. $H(x) = 3x^2 - 5x + 1$, $R(x) = x - 1$,
2. $H(x) = x^3 + 2x^2 - 3$, $R(x) = x + 2$,
3. $H(x) = 2x^3 - 3x + 1$, $R(x) = 2$,
4. $H(x) = -x^2 + 2x - 1$, $R(x) = -2$.

Zadanie 7.1.7. WIelomian $W(x)$ został podzielony przez wielomian $P(x)$. W wyniku otrzymano wielomian $H(x)$ oraz resztę $R(x)$. Wyznacz $P(x)$, mając dane pozostałe wielomiany:

1. $W(x) = 4x^3 - 9x^2 + 3x + 1$, $H(x) = x - 2$, $R(x) = 3$,
2. $W(x) = x^5 - x^3 - 3x^2 - x - 5$, $H(x) = x^2 + 1$, $R(x) = x - 2$,
3. $W(x) = -4x^4 + 2x^3 + x$, $H(x) = 2x^2 - 1$, $R(x) = 2x - 1$,
4. $W(x) = -2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 3x$, $H(x) = x^3 - 1$, $R(x) = 3x + 1$.

Zadanie 7.1.8. (R) Zbadaj, dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $W(x) = 7x^5 - 12x^4 + 3x^3 - 30x^2 + ax + b$ jest podzielny przez dwumian $x - 3$. Podaj trzy różne rozwiązania.

Zadanie 7.1.9. Dane są wielomiany $W(x) = (x-3)(x+5)(x^2-4)$ oraz $P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Wyznacz takie wartości współczynników b, c, d, e, dla których wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ są sobie równe.

Zadanie 7.1.10. Wyznacz takie wartości współczynników b, c, d, e, dla których wielomian $P(x) = x^4 + (2b+1)x^3 + (c^2 2c + 23)x^2 - 4dx + e$ jest równy wielomianowi $W(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 6c + 9)$.

Zadanie 7.1.11. Dane są wielomiany $F(x) = 2x^2 + x - 3$, $G(x) = 3x^2 - 5x + 1$, $H(x) = x^2 - 3$. Wyznacz współczynniki wielomianu $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, jeżeli:

a) $P(x) = G(x) \cdot H(x)$,

b) $P(x) = F(x) \cdot H(x)$,

c) $P(x) = G(x) \cdot F(x)$.

Zadanie 7.1.12. Dane są wielomiany $F(x) = x^3 - 2x + 1$ i $G(x) = x^2 - x + 2$ oraz wielomian $P(x) = x^5 - x^4 + (2m+1)x^2 - 5x + (m^2 - 3m + 4)$. Zbadaj, dla jakich wartości parametru m wielomiany $P(x)$ i $W(x) = G(x) \cdot F(x)$ są równe.

Zadanie 7.1.13. Dane są wielomiany $F(x) = (x-3)(x-2)^2(x^2-2)$ oraz $G(x) = (x-4)(x-2)^2(x+\sqrt{2})$. Znajdź wielomian $P(x)$, który jest największym wspólnym dzielnikiem wielomianów $F(x)$ i $G(x)$ oraz wielomian $W(x)$, będący najmniejszą wspólną wielokrotności wielomianów $F(x)$ i $G(x)$.

Zadanie 7.1.14. Tomek zapisał wielomian $W(x)$ i podzielił go prze dwumian $x-1$, $x+1$ oraz $x-2$. Otrzymał odpowiednio -3, 1 i -2. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, jeżeli:

a) $P(x) = x^2 - 1$,

b) $P(x) = x^2 - 3x + 2$,

c) $P(x) = x^2 - x - 2$,

d) $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Zadanie 7.1.15. (R) Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $H(x) = x^2 - x - 2$ jest równa $2x - 1$. Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $P(x)$ jeżeli:

a) $P(x) = x - 2$,

b) $P(x) = x + 1$.

Zadanie 7.1.16. Podaj przykład wielomianu $H(x)$, który po podzieleniu przez wielomian $F(x)$ daje resztę $R(x)$, jeżeli:

a) $F(x) = x^2 - x - 2$, $R(x) = 3x + 1$,

b) $F(x) = x^2 - 2x + 1$, $R(x) = x - 1$,

c) $F(x) = 2x^2 + x + 2$, $R(x) = 3x - 2$,

d) $F(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $R(x) = x - 3$.

7.2 Zadania o pierwiastkach wielomianów

Zadanie 7.2.1. Dany jest wielomian $W(x) = x^4+2x^3-7x^2-20x-12$. Znajdź wszystkie wielomiany stopnia pierwszego, prze które podzielny jest wielomian $W(x)$.

Zadanie 7.2.2. Znajdź wielomian $W(x)$, który jest podzielny przez dwumian $x-2$ i wynikiem tego dzielenia jest wielomian $P(x)$ o podanym równaniu:

a) $P(x) = 3x - 7$,

b) $P(x) = x^2 - 2x + 1$,

c) $P(x) = -x^3 - 4x$,

d) $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$.

Zadanie 7.2.3. Zapisz wielomian $W(x)$ w postaci iloczynu wielomianów stopnia drugiego, jeżeli:

a) $W(x) = x^4 - 16$,

b) $W(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$,

c) $W(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 4$,

d) $W(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^3 + 20x - 12$.

Zadanie 7.2.4. Zapisz wielomian $P(x)$ w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego, jeżeli:

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$,

b) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$,

c) $P(x) = x^4 - 10x^2 - x + 9$,

d) $P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + 25x - 12$.

Zadanie 7.2.5. Rozłóż wielomian $H(x)$ na czynniki:

a) $H(x) = x^4 - 5x^2 + 4$,

b) $H(x) = x^4 - 3x^2 - 4$,

c) $H(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3$,

d) $H(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 12x + 12$,

e) $H(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4$,

f) $H(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 6x$.

Zadanie 7.2.6. Podaj przykład wielomianu stopnia piątego, który ma tylko jeden trzykrotny pierwiastek–liczbę 1. Wielomian ten nie ma żadnych innych pierwiastków.

Zadanie 7.2.7. Podaj przykład wielomianu $W(x)$ spełniającego poniższe warunki:

a) $W(x)$ jest stopnia trzeciego i liczba 1 jest dwukrotnym jego pierwiastkiem, a liczba 3 jednokrotnym,

b) $W(x)$ jest stopnia czwartego i liczby 2, -1 są dwukrotnymi jego pierwiastkami,

c) $W(x)$ jest czwartego stopnia i liczba 3 jest dwukrotnym i jedynym jego pierwiastkiem,

d) $W(x)$ jest stopnia trzeciego i liczba -4 jest jedynym jego pierwiastkiem wymiernym.

Zadanie 7.2.8. Wszystkie liczby całkowite należące do zbioru rozwiązań nierówności $2x^2 - 3x - 9 < 0$ są jednokrotnymi i jednymi pierwiastkami wielomianu $W(x)$. Podaj przykłady dwóch takich wielomianów.

Zadanie 7.2.9. Rozwiązania równania $x^2 - x - 6 = 0$ są dwukrotnymi i jedynymi pierwiastkami wielomianu czwartego stopnia $P(x)$. Wyznacz wzór tego wielomianu $P(x)$.

Zadanie 7.2.10. Sprawdź czy liczba a jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, jeżeli:

a) $W(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, $a = 1$,

b) $W(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$, $a = -1$,

c) $W(x) = x^3 - 8x^2 21x - 18$, $a = 2$,

d) $W(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$, $a = -2$.

Zadanie 7.2.11. (R) Wyznacz wszystkie wartości współczynników a i b, aby liczba -1 była dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + 4x + b$.

Zadanie 7.2.12. (R) Dla jakich wartości współczynników m, n, p liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $G(x)$, a liczba 6 jest resztą z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x - 1$, jeżeli $G(x) = x^4 + mx^3 - 6x^2 + nx + p$?

Zadanie 7.2.13. (R) Wyznacz takie wartości współczynników m, n dla których wielomian $K(x) = 3x^4 + 14x^3 + (m - 1)x^2 - 26x + 2n$ ma miejsca zerowe o wartościach -2 i 1. Znajdź też pozostałe miejsca zerowe tego wielomianu.

Zadanie 7.2.14. (R) Dany jest wielomian $W(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + 51x - 36$. Liczby -4, 1 są pierwiastkami wielomianu $W(x)$. Wyznacz wartości współczynników b, c oraz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

Zadanie 7.2.15. (R) Dany jest wielomian $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2\sqrt{3}$. Wiadomo, że pierwiastkami tego wielomianu są liczby $-2, -1, 1$. Jakie są wartości współczynników a, b, c oraz czwarty pierwiastek wielomianu $P(x)$?

Zadanie 7.2.16. (R) Dla jakich wartości parametru m wielomian $W(x) = mx^3 - (m + 2)x^2 - 3x + 1$ jest podzielny przez dwumian $P(x)$m jeżeli:

a) $P(x) = x + 3$,

b) $P(x) = x + 2$,

c) $P(x) = x + 1$?

Zadanie 7.2.17. (R) Wyznacz te wartości parametru m, dla którego liczba a jest jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu $K(x) = (m^2 - 3m - 4)x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, jeżeli:

a) $a = 1$,

b) $a = -1$,

c) $a = -2$.

Zadanie 7.2.18. Miejsca zerowe wielomianu stopnia czwartego $W(x)$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy $1,5$. Podaj przykłady dwóch takich wielomianów.

Zadanie 7.2.19. Miejsca zerowe wielomianu stopnia trzeciego $P(x)$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie 2. Podaj przykład dwóch takich wielomianów.

Zadanie 7.2.20. Dane są wielomiany $W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ i $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$. Wyznacz miejsca zerowe wielomianu $G(x)$, jeżeli:

a) $G(x) = W(x) + P(x)$,

b) $G(x) = P(x) - W(x)$,

c) $G(x) = W(x) \cdot P(x)$,

d) $G(x) = 2 \cdot W(x) + P(x)$.

Zadanie 7.2.21. Dane są wielomiany $W(x) = 3x(x^2 + 2x + 1) - x^2 - 2x - 1$ oraz $P(x) = ax^3 + 2bx^2 + x + c$. Wyznacz pierwiastki tych wielomianów oraz wartości współczynników a, b, c, jeżeli wiadomo, że $W(x) = P(x)$.

Zadanie 7.2.22. Nie wykonuj dzielenia, tylko wskaż resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ prze dwumian $x + 2$, jeżeli:

a) $W(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$,

b) $W(x) = -2x^4 + x^3 + 4x^2 - 5x$,

c) $W(x) = -x^4 + 4x^2 - x + 4$,

d) $W(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x$.

Zadanie 7.2.23. Podaj wzory trzech różnych wielomianów, które po dzieleniu przez dwumian $x - 2$ dają resztę równą 2.

Zadanie 7.2.24. (R) Dany jest wielomian $G(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + a$. Znajdź taką wartość współczynnika a, aby przy dzieleniu przez wielomian $P(x)$ otrzymać resztę r, jeżeli:

a) $P(x) = x + 2$, $r = 5$,

b) $P(x) = x - 1$, $r = 4$,

c) $P(x) = x + 1$, $r = -2$,

d) $P(x) = x - 2$, $r = a^2$.

Zadanie 7.2.25. (R) Dany jest wielomian $W(x) = 2mx^3 + (m-3)x^2 + 4x - 2$. Wyznacz takie wartości parametru m, dla których reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ jest równa r, jeżeli:

a) $P(x) = x - 2$, $r = 4$,

b) $P(x) = x - 1$, $r = 5$,

c) $P(x) = x + 3$, $r = 4$,

d) $P(x) = x + 2$, $r = 10m$.

Zadanie 7.2.26. (R) Dany jest wielomian $W(x) = ax^3 + 4x^2 + bx - 1$. Liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x-2$ jest równa 3. Wyznacz wartości współczynników a, b wielomianu $W(x)$.

Zadanie 7.2.27. (R) Dany jest wielomian $P(x) = 4x^4 + ax^3 + bx - 2$. Wiadomo, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 1$ jest równa 4, a reszta z dzielenia $P(x)$ przez $x - 2$ jest równa 28. Znajdź wartości współczynników a, b.

Zadanie 7.2.28. (R) Dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = mx^3 - (m-2)x^2 + 4x - 3$ przez dwumian $x - 2$ należy do zbioru rozwiązań nierówności $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$?

Zadanie 7.2.29. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Podaj wzór wielomianu $P(x)$ stopnia trzeciego, którego pierwiastki są liczbami przeciwnymi do pierwiastków wielomianu $W(x)$.

Zadanie 7.2.30. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^3 + 8x + 12$. Podaj wzór wielomianu $P(x)$ tego samego stopnia, co wielomian $W(x)$, którego każdy pierwiastek jest większy o 1 od pierwiastka wielomianu $W(x)$.

Zadanie 7.2.31. Dany jest wielomian $W(x) = 3x^4 - 2,5x^3 - 7x^2 - 0,5x + 1$. Podaj wzór wielomianu $P(x)$ tego samego stopnia, co wielomian $W(x)$, którego pierwiastkami są odwrotności pierwiastków wielomianu $W(x)$.

Zadanie 7.2.32. Znajdź równania wszystkich prostych przechodzących przez punkt $A = (2, 1)$, których miejscami zerowymi są miejsca zerowe wielomianu $W(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 6x - 5$.

Zadanie 7.2.33. Dane są funkcje $f(x) = 4x - 8$, $g(x) = x^2 - 4x - 5$. Podaj przykład wielomianu $W(x)$, którego miejscami zerowymi są miejsca zerowe funkcji $f(x)$ i $g(x)$.

Zadanie 7.2.34. (R) Dla jakich wartości parametru m wielomian $H(x) = (x^2 + mx + 9)(x - 1)$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest większa od 2?

Zadanie 7.2.35. (R) Dane są wielomiany $F(x) = x^2 - mx + m^2 - 3$ i $G(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$. Zbadaj, jakie muszą być wartości parametru m, aby wielomian $W(x) = F(x) \cdot G(x)$ miał pięć pierwiastków rzeczywistych, których iloczyn jest liczbą mniejszą lub równą 18.

Zadanie 7.2.36. (R) Znajdź takie wartości parametru k, dla których wielomian $P(x) = (x^2 - 3kx + 2k^2 + 3)(x - 4)$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqslant 30$.

7.3 Zadania o równaniach i nierównościach wielomianowych

Zadanie 7.3.1. Rozwiąż równania:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$,

b) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$,

c) $x^4 - 11x^3 + 18x - 8 = 0$,

d) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$,

e) $x^3 + 33x^2 - 4x - 12 = 0$,

f) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$.

Zadanie 7.3.2. Podaj zbiór rozwiązań poniższych równań:

a) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 7x + 6) = 0$,

b) $(x^2 - 9x + 14)(2x^2 - 4x - 2,5) = 0$,

c) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 5x + 4) = 0$,

d) $(x^2 - 7x + 6)(x^2 - 2x - 3) = 0$,

e) $(3x^2 - x - 4)(x^2 - 6x + 5) = 0$,

f) $(5x^2 - 4x - 1)(x^2 - 4x + 3) = 0$.

Zadanie 7.3.3. Rozłóż na czynniki stopnia pierwszego lewe strony poniższych równań:

a) $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$,

b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$,

c) $x3 - x^2 - 9x + 9 = 0$,

d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$,

e) $-x^3 - x^2 + 2x + 2 = 0$,

f) $2x^3 + 6x^2 - 4x - 12 = 0$.

Zadanie 7.3.4. Podaj przykład równania czwartego stopnia, które ma:

a) cztery różne pierwiastki wymierne,

b) cztery różne niewymierne,

c) tylko dwa pierwiastki i są one liczbami wymiernymi,

d) tylko dwa pierwiastki i są one liczbami niewymiernymi,

e) dwa pierwiastki wymierne i dwa niewymierne,

f) cztery pierwiastki, w tym jeden potrójny pierwiastek wymierny i jeden niewymierny.

Zadanie 7.3.5. Podaj przykład równania czwartego stopnia, którego jedynymi pierwiastkami są liczby:

a) $-1, 2, 3$,

b) $-2, 2, 4$,

c) $-3, 3$,

d) $-2, 0, 2$.

Zadanie 7.3.6. Podaj przykład równania czwartego stopnia, które ma cztery różne pierwiastki będące kolejnymi wyrazami ciągu:

a) arytmetycznego o różnicy $1,5$ i sumie 1,

b) geometrycznego o ilorazie 2 i sumie $7,5$.

Zadanie 7.3.7. Tomek napisał pewne równanie czwartego stopnia z niewiadomą x. Po rozwiązaniu tego równania i uporządkowaniu rosnąco jego pierwiastków stwierdził, że trzy pierwsze są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a trzeci i czwarty wyraz ciągu geometrycznego. Jakie równanie mógł zapisać Tomek, jeżeli suma pierwiastków jest równa $7,5$?

Zadanie 7.3.8. Dane jest równanie $x^4+3x^3-11x^2-3x+10=0$, którego pierwiastkami są x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$. Podaj przykład takiego równania z niewiadomą y, którego pierwiastki spełniają warunki

$$y_1 = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{x_2+x_3}{3}, \quad y_3 = 3x_3 - x_4, \quad y_4 = 2x_4 - x_3.$$

Zadanie 7.3.9. (R) Dane jest równanie $x^3 - 7x + 6 = 0$, którego pierwiastkami są x_1, x_2, x_3. Nie wyznaczając wartości tych pierwiastków, podaj przykład równania z niewiadomą y, którego pierwiastki spełniają warunki:

a) $y_1 = x_1 \cdot x_2$, $y_2 = x_2 \cdot x_3$, $y_3 = x_1 \cdot x_3$,

b) $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = y_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$,

c) $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$, $y_3 = \frac{1}{x_3}$.

Wskazówka: Skorzystaj ze wzorów Viete'a dla równania trzeciego stopnia.

Zadanie 7.3.10. (R) Dane jest równanie $x^4 - 5x^3 + (a-1)x^2 + 5x - a = 0$, gdzie a przybiera wartości z przedziału $\langle -10, 10\rangle$ i $a \in \mathbb{C}$. Znajdź takie wartości parametru a, dla których równanie to będzie miało cztery pierwiastki wymierne. Wskazówka: Zapisz lewą stronę równania w postaci iloczynu dwóch czynników $(x^2-1)(x^2-5x+a) = 0$.

Zadanie 7.3.11. Rozwiąż nierówności:

a) $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3) > 0$,

b) $x(x+2)(x-1)(x-4) < 0$,

c) $(x^2-1)(x^2-4) \geqslant 0$,

d) $x(x-4)(x^2-9) > 0$,

e) $x(x-2)(x^2-1)(x-3) \leqslant 0$,

f) $x^2(x^2-4) < 0$.

Zadanie 7.3.12. Rozwiąż poniższe układy nierówności:

a) $\begin{cases} x^4-5x^2+6>0 \\ x>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^4-2x^3-4x^2+10x-5<0 \\ x<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^4-7x^2+12 \leqslant 0 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^4-8x^2+7 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

Zadanie 7.3.13. Podaj takie nierówności, których zbiorem rozwiązań jest zbiór A:

a) $A=(-\infty,-5)\cup(-2,1)\cup(5,+\infty)$,

b) $A=(-\infty,-6\rangle\cup\langle-2,2\rangle\cup\langle5,+\infty)$,

c) $A=(-\infty,-3\rangle\cup\langle-1,0\rangle\cup\langle3,+\infty)$,

d) $A=(-5,-2)\cup(0,1)\cup(3,+\infty)$,

e) $A=(-6,0)\cup(0,6)$,

f) $A=(-\infty,0\rangle\cup\langle1,2\rangle\cup\langle3,6\rangle$.

Zadanie 7.3.14. Wyznacz wszystkie iczby naturalne należące do zbiorów rozwiązań poniższych nierówności:

a) $x^4-4x^3-4x^2+16x \leqslant 0$,

b) $x^5-2x^4-10x^3+20x^2+9x-18 \geqslant 0$,

c) $x^4+x^3-16x^2-16x < 0$,

d) $x^4-5x^3-4x^2+20x \leqslant 0$.

Zadanie 7.3.15. Rozwiąż równania i sprawdź, czy wszystkie ich rozwiązania zawierają się w zbiorze rozwiązań nierówności $x^3-2x^2-5x+6 \geqslant 0$:

a) $x^3-3x^2-6x+8=0$,

b) $x^4-5x^2+4=0$,

c) $x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10 = 0$,

d) $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.

Zadanie 7.3.16. Podaj przykład równania czwartego stopnia z niewiadomą x, które ma cztery różne całkowite pierwiastki należące do zbioru rozwiązań nierówności $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$.

Zadanie 7.3.17. Wyznacz rozwiązania poniższych układów równań:

a) $\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 2x + 8 < 0 \\ x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 2x + 8 < 0 \\ x^3 + 6x^2 - 4x - 24 = 0, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 12 \leqslant 0 \\ x^4 - 5x^3 + x^2 + 25x - 30 = 0, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^5 - x^4 - 9x + 9 = 0 \\ x^3 + 4x^2 - 3x - 12 \leqslant 0. \end{cases}$

Zadanie 7.3.18. Dane są wielomiany $F(x) = x^2 - 4x + 3$, $G(x) = x^3 - 3x + 2$, $H(x) = x^2 - 5x + 4$. Dla jakich wartości x wielomian $W(x)$ osiąga wartości ujemne, jeżeli:

a) $W(x) = F(x) \cdot G(x)$,

b) $W(x) = F(x) \cdot H(x)$,

c) $W(x) = G(x) \cdot H(x)$,

d) $W(x) = F(x) \cdot G(x) \cdot H(x)$?

Zadanie 7.3.19. Dane jest równanie $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$. Podaj przykład takiego równania, którego rozwiązania są liczbami:

a) przeciwnymi do rozwiązań tego równania,

b) odwrotnymi do rozwiązań tego równania.

Zadanie 7.3.20. Dane jest równanie $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$. Rozwiązania tego równania uporządkowane rosnąco to liczby a, b, c. Podaj przykład takiego równania, którego pierwiastki są równe:

a) $x_1 = a + b$, $x_2 = b - c$, $x_3 = (a + 2b)^2$,

b) $x_1 = a - b$, $x_2 = b + c$, $x_3 = (c - 2b)^2$,

c) $x_1 = 2a + b$, $x_2 = b$, $x_3 = 2b - c$.

Zadanie 7.3.21. (R) Znajdź takie wartości parametru m, dla którego równanie $x^4 - (m^2 + 1)x^2 + 3m^2 - 2 = 0$ ma cztery różne pierwiastki rzeczywiste.

Zadanie 7.3.22. Dane jest równanie $2x^4 - 3x^3 - 20x^2 + ax + b = 0$. Wyznacz takie wartości parametrów a i b, aby do zbioru rozwiązań tego równia należały liczby 2 i $-\frac{1}{2}$. Dla otrzymanych w ten sposób wartości parametrów oblicz pozostałe pierwiastki równania.

Zadanie 7.3.23. Dane są wielomiany $W(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 15x + 10$ oraz $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 7x - 5$. Wyznacz takie wartości x, dla których zachodzi równość $W(x) \leqslant P(x)$.

Zadanie 7.3.24. (R) Dla jakich wartości współczynników a, b, c, d wielomian $W(x) = ax^4 + ax^3 + cx + d$ przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (-2, -1) \cup (2, 3)$?

Zadanie 7.3.25. (R) Dla jakich wartości parametru m równanie $(x^2 + 2mx + m^2 - m)(x + 3) = 0$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, których iloczyn jest liczbą ujemną?

Zadanie 7.3.26. Wynikiem dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x + 2$ jest wielomian $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia się wykresu wielomianu $W(x)$ z wykresem:

a) prostej o równaniu $f(x) = -5x + 4$,

b) paraboli o równaniu $g(x) = x^2 + 3x + 8$,

c) wielomianu $H(x) = x^4 - 5x + 4$.

Zadanie 7.3.27. Znajdź trzy takie liczby, które spełniają poniższe warunki:

a) są kolejnymi liczbami naturalnymi, których iloczyn jest równy 5814,

b) są kolejnymi liczbami naturalnymi parzystymi, których iloczyn jest równy 13728,

c) są kolejnymi liczbami naturalnymi podzielnymi przez trzy, których iloczyn jest równy 26730.

d) są kolejnymi liczbami naturalnymi podzielnymi przez pięć, których iloczyn jest równy 15000.

Zadanie 7.3.28. Tomek napisał na kartce liczbę dwucyfrową, drugą o 3 od niej większą oraz trzecią o 5 większą od drugiej. Obliczył iloczyn zapisanych liczb i otrzymał 3600. Jaka jest suma liczb zapisanych na kartce przez Tomka?

Zadanie 7.3.29. Tomek zapisał cztery kolejne wielokrotności liczby cztery. Od iloczynu trzech mniejszych odjął kwadrat największej liczby i otrzymał 3264. Oblicz, o ile iloczyn dwóch największych liczb zapisanych przez Tomka jest większy od iloczynu dwóch mniejszych liczb.

Zadanie 7.3.30. Objętość prostopadłościanu, którego długości krawędzi wyrażone w tej samej jednostce są kolejnymi liczbami nieparzystymi, jest równa 6783. Jakie są wymiary tego prostopadłościanu?

Zadanie 7.3.31. Długości krawędzi dwóch prostopadłościanów wyrażone w tej samej jednostce są kolejnymi liczbami naturalnymi. Długości pierwszego prostopadłościanu są liczbami nieparzystymi, drugiego liczbami parzystymi. Suma objętości tych figur jest równa 6003. Wyznacz wymiary tych prostopadłościanów.